Analiza matematyczna 1B, Lista 5

1. Używając własności funkcji wykładniczej oblicz $\lim n \sin(\frac{1}{n})$ i $\lim 1-n\cos(\frac{1}{n})$.

2. Uzasadnij że dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $|\exp(it)| = 1$.

3. Liczbę e definiujemy jako $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pokaż że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $(1+\frac{1}{n})^n < e$. Ponadto dla naturalnych k mamy $\liminf(1+1/n)^n \geq \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$. Wywnioskować stąd że $\lim(1+1/n)^n = e$.

4. Pokaż że gdy $|q| < 1$ to $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$. Wskazówka: Użyj wzoru na iloczynn szeregów.

5. Funkcje cosh (cosinus hiperboliczny) i sinh (sinus hiperboliczny) definujemy wzorami $\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$, $\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$. Zapisz cosh i sinh jako sumę szeregu potęgowego.

6. Funkcja f z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R} - \{0\}$ spełnia równość $f(x+y) = f(x)f(y)$. Pokaż że jeśli $f(1) = 1$ to dla wymiernych x zachodzi $f(x) = 1$. Wywnoskuj stąd że jeśli $f(1) = \exp(1)$ to dla wymiernych x zachodzi $f(x) = \exp(x)$.

7. Sprawdź że dla dodatnich całkowitych n i zespolonych x zachodzi równość:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}) = 2^{-n} \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \exp(\frac{i(2k+1)x}{2^n})$$

i oblicz sumę.

8. Szeregi o wyrazach dodatnich $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne. Pokaż zbieżność szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$.

9. Wyjaśnij dlaczego poniższe rozumowanie jest błędne:
$0 = 0+0+\cdots = (1-1)+(1-1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Zmieniając kolejność wyrazów możemy powyższy szereg zapisać w postaci $(1+1-1)+(1+1-1)+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$. A więc $0 = \infty$.

10. Wyjaśnij dlaczego poniższe rozumowanie jest błędne:
Dla $q > 0$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ jest sumą liczb dodatnich, więc wynik jest większy niż zero. Lecz $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ co dla $q > 1$ daje wynik ujemny. A więc liczba dodatnia jest mniejsza niż zero.

11. Używając własności funkcji wykładniczej przedstaw $cos(x+y)$ oraz $sin(x+y)$ w terminach $cos(x), sin(x), cos(y)$ i $sin(y)$.