Analiza matematyczna 1B, Lista 6

1. Pokaż że dla naturalnego n mamy $\sum_{k=0}^{n-1} \exp(\frac{2k\pi i}{n}) = 0$. Wywnioskuj stąd że $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) = 0$.

2. Oblicz $\cos(\pi/3)$ i $\sin(\pi/3)$. Wskazówka: $\exp(i\pi/3)$ jest pierwiastkiem wielomanu $z^3 + 1 = 0$.

3. Znajdź wartość główną potęgi i^i.

4. Uzasadnij że wartość główna pierwiastka zespolonego (tzn. potęgi $z^{1/2}$) ma nieujemną część rzeczywistą. Jak wygląda obraz wartości głównej pierwiastka trzeciego stopnia? Wskazówka: Dla $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mamy $\cos(y) \geq 0$.

5. Uzasadnij że dla dodatniego całkowitego n niezerowa liczba zespolona z ma dokładnie n pierwiastków stopnia n, tzn. równanie $z = y^n$ ma dokłasnie n rozwiązań.

6. Pokaż że dla rzeczywistych x zachodzi nierówność $\exp(x) \geq 1 + x$. Wywnioskuj stąd że dla $x \in (0, \infty)$ zachodzi nierówność $\log(x) \leq x - 1$.

7. Znajdź maksimum funkcji $x \exp(-x)$ na osi rzeczywistej. Użyj to do znalezienia minimum $x \log(x)$ i x^x dla $x \in (0, \infty)$. Wskazówka: Przyjmij za znaną nierówność $\exp(x) \geq ex$.

8. Dla $x \in \mathbb{R}$ zapisz wzorem funkcję odwrotną do sinh. Wskazówka: $\exp(x)$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach zależnych od $\sinh(x)$.

9. Uzasadnij że jeśli f jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ taką że $f(x)^2 = \exp(ix)$ i $f(0) = 1$ to $f(x) = \exp(\frac{ix}{2})$. Podobnie, jeśli $\exp(if(x)) = \exp(ix)$ i $f(0) = 0$ to $f(x) = x$. Wskazówka: Zauważ że $f(x) \exp(-\frac{ix}{2})$ przyjmuje tylko wartości 1 i -1 i użyj własność Darboux.

10. Udowodnij, że jeśli $\lim_{x->a} f(x) = b$, to istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że zbiór wartości $f(x)$ dla $x \neq a$ oraz $|x - a| < \delta$ jest ograniczony.

11. Pokaż, że równanie $2x = \sin(x) + 1$ ma w przedziale $[0, 1]$ przynajmniej jedno rozwiązanie.

12. Oblicz granice $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$ i $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{x^\gamma - 1}$ przy ustalonych α, β, γ.

13. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0}(\sin(x)/x - 1)/x$. Wskazówka: Zapisz iloraz pod znakiem granicy jako szereg i znajdź oszacowanie dla sumy tego szeregu.

14. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x) - 2\sin(x)}{x \cos(x)}$.

15. Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. Wskazówka: $1 - \cos(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}$.

16. Uzasadnij że jeśli f, g i h mają wspólną dziedzinę, $f \leq g \leq h$ i $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} h = b$ to $\lim_{x\to a} g = b$.

17. Uzasadnij że dla naturalnego n mamy $\log(2^n) \leq n$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}$.

18. Pokaż, że funkcje $F(x) = \max f(x), g(x)$ i $G(x) = \min f(x), g(x)$ są ciągłe w każdym punkcie, w którym zarówno f, jak i g jest ciągła.

19. Ciąg liczb rzeczywistych a_k ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_k \in \{-1, 1\}$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty} s_k a_k$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezwzględnie zbieżny. Podobnie dla $s_k \in \{0, 1\}$.

20. Funkcja f jest rosnąca i odwzorowuje przedział (a, b) na przedział (c, d). Pokaż, że funkcja odwrotna do f też jest na.