Analiza matematyczna 1B, Lista 7

1. Uzasadnij że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła na przedziale $[0,2]$, $f(0) < 2$, $f(2) > 2$, lecz nie istnieje wymierne q takie że $f(x) = 2$.

2. Uzasadnij że funkcja $f(x) = -(x^2-3)^2$ jest ciągła na przedziale $[0,2]$, $\sup_{x\in[0,2]} f(x) = 0$, lecz dla wymiernych q mamy $f(q) < 0$.

3. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Uzasadnij że istnieje taki ciąg liczb całkowitych k_n że ciąg $q_n = \frac{k_n}{2_n}$ jest rosnący i $\lim q_n = a$.

4. Zakładamy że $a, b > 0$. Bazując na nierówności $(ab)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{a+b}{2}$ indukcyjnie pokaż że dla q postaci $k/2^n$ z całkowitym k takim że $0 < k < 2^n$ zachodzi nierówność $a^q b^{1-q} \leq qa + (1-q)b$.

5. Niech $a, b > 0$. Oblicz granicę a^{c_n} zakładając że $\lim c_n = \alpha$. Następnie oblicz granicę b^{1-c_n}. Używając tego i wyników poprzednich zadań pokaż że $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ dla $\alpha \in [0,1]$.

6. Zapisz $\tan(x)$ w terminach $\exp(2ix)$. Rozwiąż otrzymaną zależność i zapisz $\exp(2ix)$ w terminach $\tan(x)$. Użyj otrzynane wyrażenia do przedstawienia $\sin(x)$ i $\cos(x)$ w terminach $\tan(x/2)$. Przedstaw $\tan(x+y)$ w terminach $\tan(x)$ i $\tan(y)$.

7. Niech będzie dany zstępujący ciąg przedziałów domkniętych $I_{n+1} \subset I_n \subset R$. Udowodnij, że przekrój $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ jest niepusty. Pokaż na przykładzie, że tak być nie musi dla przedziałów półotwartych, a tym bardziej otwartych. Pokaż na przykładzie że przekrój może być pusty dla domkniętych przedziałów liczb wymiernych.

8. Udowodnij nierówność $\exp(x) \leq 1 + \frac{x}{1-x}$ dla $x \in (-\infty, 1)$. Wywnioskuj stąd że dla $x \in (-1,1)$ zachodzi nierówność $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x)$. Oblicz $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$. Wskazówka: Użyj nierówność $\exp(x) \geq 1 + x$ do oszacowania $\exp(-x)$.

9. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n$. Wskazówka: Użyj wynik poprzedniego zadania.

10. Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą taką że $f(x+y) = f(x)f(y)$ i $f(x) \geq 1 + x$. Pokaż że $f(x) = \exp(x)$.

11. Uzasadnij że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty (pierwiastkiem wielomianu w nazywamy liczbę a taką że $w(a) = 0$). Pokaż na przykładzie że istnieją wielomiany rzeczywiste stopnia parzystego nie posiadające pierwiastków rzeczywstych.

12. Funkcja f jest zdefiniowana w ten sposób że dla x niewymiernych jej wartość to 0, zaś dla x wymiernych jej wartość to 1. Uzasadnij że f jest w każdym punkcie nieciągła.

13. Funkcja f jest zdefiniowana w ten sposób że dla x niewymiernych jej wartość to 0, zaś dla x wymiernych jej wartość to $1/k$ gdzie $x = n/k$ jest przedstawieniem x jako ułamek nieskracalny z dodatnim mianownikiem. Uzasadnij że f jest ciągła w punktach niewymiernych a nieciągła w wymiernych.

14. Przypominam że dla $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ definujemy normę $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Następnie dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujemy odległość wzorem $d(x,y) = \|x-y\|$. Uzasadnij że d jest metryką. Wskazówka: Iloczyn skalarny definiujemy wzorem $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_i y_i$. Wtedy $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ i $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Następnie użyj nierówność Schwarza z zadania 16 Listy 2.

15. Uzasadnij że $d(f,g) = \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ jest metryką na zbiorze funkcji ograniczonych na $\mathbb{R}$. Ponadto uzasadnij że otrzynama przestrzeń metryczna jest zupełna.

16. Niech d będzie metryką na pewnym zbiorze A. Uzasadnij że $d_1(x,y) = \min(d(x,y),1)$ też jest metryką na A.
17. Pokaż że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon}$ jest zbieżny dla dowonego $\varepsilon > 0$. Podobnie szereg $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^{1+\varepsilon}}$ jest zbieżny dla dowonego $\varepsilon > 0$ zaś rozbieżny dla $\varepsilon = 0$.
18. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$.
19. Ciąg $a_n > 0$ jest rosnący i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pokaż że wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = a.$$

20. Niech a_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych, $x_n = \frac{1}{n+1}$, $A = \{0\} \cup \{x_n\}$. Funkcję f na $A - \{0\}$ definiujemy wzorem $f(x_n) = a_n$. Pokaż że f ma gramicę $x = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg a_n ma granicę. Zakładając że a_n ma granicę a przyjmujemy że $f(0) = a$. Uzasadnij że wtedy f jest funkcją ciągłą na A. Komentarz: Oznacza to że ogólne własności granic ciągów wynikają z własności funkcji ciągłych na ogólnych zbiorach.
21. Niech f będzie funkcją ciągła na przdziale $[a,b]$ o wartościach w $[a,b]$. Uzasadnij że istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki że $f(c) = c$.
22. Z definicji sprawdź czy podane ciągi spełniają warunek Cauchy'ego: $\frac{1}{n}$, $(-1)^n$, $\sum_{k=1}^{n} n^{-3}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.