Analiza matematyczna 1B, Lista 8

1. Które z poniższych podzbiorów zbioru liczb zespolonych są otwarte: $B = \{z : |z| < 1\}$, $B \cup [0, \frac{1}{2}]$, $B \cup [0, 1]$, $B \cup (0, 2)$, $B - (0, 2)$ (różnica zbiorów), $B - \mathbb{Q}$ gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza liczby wymierne, $B - \{0, \frac{1}{2}\}$, $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$, $\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

2. Uzasadnij że $\{z : |z| \leq 1\} \cup [1, 2]$ jest zbiorem punktów skupienia pewnego ciągu liczb zespolonych.

3. Oblicz (właściwe lub niewłaściwe) granice: $\lim_{x\to 0_+} \exp(\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to 0_+} x^{-3} \exp(\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to 0_-} \exp(\frac{1}{x})$.

4. Niech $f(x) = x \log(|x|)$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Oblicz $\lim_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim_{x\to 0_-} f(x)$ i uzasadnij że f jest funkcją ciągłą.

5. Niech $f(x) = \exp(x)$ dla $x \leq 0$ i $f(x) = x^2 + a$ dla $x > 0$. Dobierz a tak by f była ciągła.

6. Które z poniższych funkcji są ciągłe: $f_1(x) = \sin(\frac{1}{x^3})$ dla $x \neq 0$ i $f_1(0) = 0$, $f_2(x) = x \sin(\frac{1}{x^2})$ dla $x \neq 0$ i $f_2(0) = 0$, $f_3(x) = \exp(\frac{1}{x})$ dla $x > 0$, $f_3(0) = 0$.

7. Funkcję f o wartościach rzeczywistych nazywamy wypukłą jeśli jej dziedzina to przedział (być może o nieskończonych końcach) i dla dowolnych x i y z dziedziny i dowolnego α takiego że $0 \leq \alpha \leq 1$ zachodzi nierówność $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. Uzasadnij że jeśli $f(\frac{x+y}{2} \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ to powyższa nierówność zachodzi dla wymiernych α. Jeśli ponadto f jest ciągła to f jest wypukła. Sprawdź że jeśli f i g są rosnące, ciągłe i wypukłe to fg też jest wypukła. Wywnioskuj stąd że $f(x) = x^n$ jest wypukła na $[0, \infty)$ i że $f(x) = \exp(x)$ jest wypukła. Pokaż że wypukłość exp jest ściśle związana z nierównością między średnią arytmetyczną a geometryczną z zadania 5 listy 7.

8. Zakładając że f/g jest różniczkowalne w punkcie x wyprowadź wzór na pochodną ilorazu ze wzoru na pochodną iloczynu. Uzasadnij różniczkowalność f/g używając wzorów innych niż wzór na pochodną ilorazu.

9. Oblicz pochodne $x^3 - x + 2$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\exp(x^2)$, x^x (ta ostatnia dla $x > 0$).

10. Używając wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów i wartości $\sin'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$ oblicz $\sin'(x)$ i $\cos'(x)$ dla dowolnego x.

11. Z definicji oblicz pochodną $f(x) = \frac{x^2+5}{x-1}$ dla $x = 2$.

12. Z definicji sprawdź różniczkowalność funkcji dla $x = 0$: $f_1(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$ i $f_1(x) = -f_1(-x)$ dla $x < 0$, $f_2(x) = x \sin(1/x)$ dla $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$, $f_3(x) = x^2 \log(x)$ dla $x > 0$, $f_3(x) = 0$ dla $x \leq 0$, $f_4(x) = \exp(\frac{1}{x^2})$ dla $x \neq 0$, $f_4(0) = 0$, $f_5(x) = x \log(|x|)$ dla $x \neq 0$, $f_5(0) = 0$, $f_6(x) = |x|$.

13. Uzasadnij że poniższe funkcje są wszędzie różniczkowalne i oblicz ich pochodne: $x|x|$, $|\sin(x)|^{\frac{3}{2}}$, $(\sin(x) + |\sin(x)|)^2$, $\lfloor x \rfloor \sin(\pi x)^2$ (gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą x.

14. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x i $f(x) > 0$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x + \frac{1}{n})}{f(x)} \right)^n .$$

Wskazówka: Popatrz na logarytm wyrażenia pod znakiem granicy.

15. Używając pochodne oblicz następujące granice:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x - 2h)}{h},$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-1}{(x+h)^2-x^2} \qquad x \neq 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x-h)}{\sin(h)+\sin^2(h)}.$$

16. Wiedząc, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a, oblicz granicę

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}.$$

17. Niech $f_n(x) = \tanh(nx^3) = \frac{\sinh(nx^3)}{\cosh(nx^3)}$. Niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Sprawdź że granica definiująca $f(x)$ istnieje dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Oblicz pochodną f_n' i granicę $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. Czy granica f_n' jest pochodną f?