Analiza matematyczna 1B, Lista 8

1. Niech $f(x) = \exp(ix)$. Mamy $f(0) = f(2\pi) = 1$. Sprawdź że $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego x. Wyjaśnij dlaczego dowód lematu (twierdzenia) Rolle'a nie stosuje się do f.

2. Dla $b > 0$ znajdź maksimum $x^b \exp(-x)$ an $[0, \infty)$.

3. Niech $f(x) = \exp(\frac{1}{x(x-1)})$ dla $x \in (0,1)$ i $f(x) = 0$ dla pozostałych x. Uzasadnij że f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

4. Niech $f(x) = \exp(x)$ dla $x < -1$ i $f(x) = \cos(x)$ dla $x > 0$. Zdefiniuj f na $[-1, 0]$ tak by otrzymana funkcja miała dwie pochodne ciągłe.

5. Dana jest dodatnia funkcja ciągła f na $[a, b]$, która jest ponadto różniczkowalna w (a, b). Pokaż, że istnieje c, takie że $a < c < b$ i

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp(\frac{f'(c)(b-a)}{f(c)})$$

W tym celu zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji log f .

6. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = ax - \sin(x)$ jest rosnąca na $(-\infty, \infty)$.

7. Wykaż przez różniczkowanie, że funkcja $f(x) = x\log(1+x)$ jest ściśle rosnąca na $(0, \infty)$.

8. Używając pochodne pokaż że dla $0 < b < 1$ i $x \geq 0$ zachodzi nierówność $(1 + x)^b \leq 1 + x^b$ z równością tylko dla $x = 0$.

9. Przy pomocy pochodnych sprawdź że dla $a \geq 1$ funkcja $f(x) = x^a$ jest funkcją wypukłą na $(0, \infty)$. Dla $a \leq 1$ sprawdź że $-f$ jest funkcją wypukłą (wtedy mówimy że f jest wklęsła).

10. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x + \log x$ w punkcie $(e, 1 + e)$.

11. Znajdź pochodne funkcji odwrotnych do sinh, cosh i tanh (definicja: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$).

12. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną na pewnym przedziale i przyjmującą wartości rzeczywiste. Uzasadnij że jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) \neq 0$ to istnieje przedział otwarty U taki $x_0 \in U$ i $f(x) \neq 0$ dla $x \in U$. Wynioskuj stąd że jeśli f jest różniczkowalna, $f'(x_0) \neq 0$ i f' jest ciągła w x_0 to f jest odwracalna na pewnym przedziale zwierającym x_0.

13. Funkcja $g(y)$ jest różniczkowalna w punkcie $y = 2$ i $g'(2) = 3$. Oblicz pochodną funkcji $h(x) = g(x^2 + 1)$ w punkcie $x = 1$.

14. Funkcja $f(x)$ spełnia $f(2 - x) = f(x)$ oraz jest różniczkowalna w $x = 1$. Wykaż, że $f'(1) = 0$.

15. Sprawdź że funkcja zadana wzorem $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ jest różniczkowalna na całej prostej, ale pochodna jest nieciągła.