Analiza matematyczna 2B, Lista 10

1. Niech $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi takimi że $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < \infty$. Uzasadnij że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $A \subset [0,1]$, taki że $M_1([0,1] - A) < \varepsilon$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na A. Uzasadnij że można dodatkowo zażądać by A był zbiorem zwartym. Czy można zażądać by A był otwarty?

2. Niech X będzie ośrodkową przestrzenią metryczną zaś U będzie otwartym podzbiorem X. Uzasadnij że

1. istnieje funkcja ciągła f taka że $f(x) \leq 1$ dla każdego $x \in X$ i $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$.
2. istnieją funkcje ciągłe g_n takie że $g_{n+1} \geq g_n$ i $1_U(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$
3. istnieją funkcje ciągłe h_n takie że $h_n \geq 0$ i $1_U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$

3. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem miary zero. Uzasadnij że istnieje ciąg funkcji ciągłych f_n taki że $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < \infty$ i że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest rozbieżny dla $x \in A$.

Wskazówka: Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$ jest regularna, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty U takie że $A \subset U$ i $M_n(A) < \varepsilon$.

4. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Oblicz

$$\int_A xy,$$

$$\int_A \cos(x+y).$$

5. Niech $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$. Oblicz całki

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy,$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx.$$

Dlaczego do f nie stosuje się twierdzenie Fubiniego?

6. Niech $I_\alpha = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^\alpha dx$. Uzasadnij że dla $\alpha > 0$ mamy $(2\alpha+1)I_\alpha = 2\alpha I_\alpha$. Podaj jawny wzór na I_α dla $\alpha = \frac{n}{2}$ gdzie n jest liczbą naturalną.

7. Niech B_n będzie kulą jednostkową w $\mathbb{R}^n$. Uzasadnij że

$$M_{n+1}(B_{n+1}) = M_n(B_n) \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx.$$

Podaj jawny wzór na objętość kuli.

8. Niech X będzie przestrznią z miarą μ, zaś $f : X \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Niech $A_t = \{x \in X : |f(x)| > t\}$. Uzasadnij że

$$\lim_{t\to\infty} \int_{A_t} f = 0.$$

Uzasadnij że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że $|\int_A f| < \varepsilon$ dla $\mu(A) < \delta$.

9. Oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n/2}(1-\frac{2x}{n})^n\exp(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}(1+\frac{x}{n})^n\exp(-2x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\exp(-x-n-n\cos(x))dx.$$

10. Niech f będzie ciągła i nieujemna na $(0,1]$ i równa 0 poza tym. Zakładamy że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 f(x)dx$$

jest zbieżna. Uzasadnij że $f\in L^1$. Uzasadnij że bez założenia zbieżności całki może się zdażyć że $f\notin L^1$.