Analiza matematyczna 2B, Lista 11

1. Podaj przykład funkcji ciągłej na $(0,1]$, takiej że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 f(x)dx$$

jest zbieżna, ale $f \notin L^1$.

2. Uzasadnij że jeśli f jest ciągła na $(0,1]$ i $f \in L^1$ to całka niewłaściwa

$$\int_0^1 f(x)dx$$

jest zbieżna.

3. Niech $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$ dla $p_1 < p_2$. Uzasadnij że $f \in L^q$ dla $q \in [p_1, p_2]$.

4. Niech $a_n = 2^{-n}(n - 2^n)$ dla $n \in [2^n, 2^{n+1})$. Ciąg funkcji f_n dla $n > 2$ definiujemy następująco: $f_n(x) = 1$ dla $x \in [a_n, a_n + \frac{1}{\log(n)}]$, $f_n(x) = 0$ dla pozostałych x. Uzasadnij że $f_n \to 0$ w L^p dla $p < \infty$. Uzasadnij że ciąg $f_n(x)$ jest rozbieżny dla $x \in [0,1]$.

5. Ciąg f_n jest zbieżny w L^p dla pewnego p. Ponadto $f_n(x) \to f(x)$ p.w. Uzasadnij że $f_n \to f$ w L^p.

6. Podaj przykład ciągu funkcji takiego że $f_n(x)$ jest zbieżny do 0 p.w., ale ciąg f_n nie jest zbieżny w L^p.

7. Niech $f_n \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$. Zakładamy że f_n jest zbieżny zarówno w L^{p_1} jak i w L^{p_2}. Uzasadnij że granica w L^{p_1} jest równa granicy w L^{p_2}.

8. Podaj przykład ciągu f_n takiego że $f_n \in L^1 \cap L^2$, f_n jest zbieżny w L^1 lecz rozbieżny w L^2. Podobnie podaj przykład ciągu który jest zbieżny w L^2 lecz rozbieżny w L^1.

9. Niech μ będzie miarą skończoną. Powiemy że ciąg funkcji mierzalnych f_n zbiega według miary do f wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0.$$

Uzasadnij że ciąg f_n zbiega według miary do f wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \to 0.$$

Wywnioskuj stąd że istnieje metryka na przestrzeni funkcji mierzalnych taka że zbieżność według miary to zbieżność względem tej metryki.

10. Zakładamy że miara jest skończona. Uzasadnij że jeśli $f_n(x) \to f(x)$ p.w. to ciąg f_n jest zbieżny według miary do f. Uzasadnij że jeśli f_n jest zbieżny według miary do f to z ciągu f_n można wybrać podciąg f_{n_k} taki że $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.w. Wywnioskuj stąd że ciąg f_n jest zbieżny według miary do f wtedy i tylko wtedy gdy z każdego podciągu można wybrać podciąg zbieżny punktowo p.w.

Wskazówka: Do wybrania podciągu zbieżnego punktowo użyj warunek z poprzedniego zadania i metodę z dowodu twierdzenia o zupełności L^1.

11. (Twierdzenie Jegorowa). Zakładamy że miara jest skończona. Uzasadnij że jeśli ciąg $f_n(x) \to f(x)$ p.w. to każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór A taki że $\mu(X - A) < \varepsilon$ i f_n jest zbieżny jednostajnie na A.

Wskazówka: Po użyciu warunku z zadania 9 jest to podobne do zadania 1 listy 10. Dokładniej, przy ustalonym δ niech $B_m = \{x : \forall_{n>m} |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$.

Wtedy $X = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$. Wynik dostaniemy znajdując A taki że $\mu(X - A) < \varepsilon$ i dla każdego $\delta = 2^{-1}$ istnieje m taki że $A \subset B_m$.

12. Udowodnij twierdznie Lebesque'a o ograniczonej zbieżności używając twierdzenie Jegorowa (czyli wynik zadania 11) i nie używając innych twierdzeń o zbieżności całek.

13. Zakładamy że miara jest skończona. Uzasadnij że teza twierdznia Lebesque'a o ograniczonej zbieżności pozostaje prawdziwa jeśli zakładamy że f_n dąży według miary do f i istnieje funkcja całkowalna h taka że $|f_n| \leq h$.

14. Dla jakich p poniższe funkcje należą do L^p?

$$\exp(-|x|),$$

$$\frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+|x|}},$$

$$\frac{1}{\log(2+|x|)\sqrt{1+|x|}},$$

$$\frac{\log(|x|}{\sqrt{1+|x|}},$$

$$\frac{1}{(1+|x|)\sqrt{|x|}}.$$