Analiza matematyczna 2B, Lista 12

1. Pokaż że zbiór funkcji postaci $\exp(-tx)$ dla $t > 0$ jest gęsty w $C_0[0, \infty)$ (tzn. w zbiorze funkcji ciągłych na $[0, \infty)$ takich że granica w ∞ to 0).

2. Oblicz współczynniki c_n szeregu Fouriera dla następujących funkcji:
$f(x) = x$ dla $x \in [0, \pi)$, $f(x) = 0$ dla $x \in [\pi, 2\pi]$
$f(x) = x$ dla $x \in [0, \pi)$, $f(x) = x - 2\pi$ dla $x \in [\pi, 2\pi]$
$f(x) = \max(\sin(x) - a, 0)$

3. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ szereg f_n jest zbieżny w L^p gdy

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \text{ dla } x \in [n, n+1), \text{ 0 poza tym,}$$

$$f_n(x) = 2^{-an} \text{ dla } x \in [2^n, 2^{n+1}), \text{ 0 poza tym.}$$

4. Niech $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 1 - 2x^2$ i niech V będzie podprzestrzenią $L^2([-1, 1])$ rozpiętą przez f_1, f_2, f_3. Znajdź najlepsze przybliżenie w normie $L^2([-1, 1])$ do $\exp(x)$ przy pomocy funkcji z podprzestrzeni V.

5. Uzasadnij że jeśli f jest absolutnie ciągła i f' (słaba pochodna) jest w L^p z $p > 1$ to f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$.
Wskazówka: Użyj nierówność Höldera do oszacowania całki z f'.

6. Niech C będzie klasycznym zbiorem Cantora. Funkcję F defininujemy następująco. Jeśli $x \in C$ to zapisujemy x jako $x = 2\sum_{i=1}^{\infty} c_i 3^{-i}$ gdzie $c_i \in \{0, 1\}$ i przyjmujemy $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-i}$. Dla $x \notin C$ przyjmujemy $F(x) = \sup_{y \in C, y \le x} F(y)$. Uzasadnij że F jest ciągła, ale nie jest absolutnie ciągła. Niech μ będzie miarą związaną z F taką że $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Uzasadnij że μ jest skupiona za zbiorze Cantora.

7. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną spełniającą warunek

$$f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Uzasadnij że istnieje przedział otwarty I taki że f jest ograniczona na I.
Komentarz: Jest to główny krok w dowodzie że taka f jest ciągła (a więc i wypukła). Bez załorzenia mierzalności f może być nieograniczona.

8. Uzasadnij że jeśli f spełnia warunek Lipszitza i jest różniczkowalna, zaś $g \in L^1$ to $f \star g$ jest różniczkowalna i na ciągłą pochodną.
Wskazówka: Do różniczkowalności użyj twierdzenie Lebesgue'a o ograniczonej zbieżności.

9. Niech $M > 0$ będzie liczbą zaś $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funkcją taką że $|f(x)| < M$ i $|f'(x)| < M$. Uzasadnij że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje funkcja g taka że $|g(x) - g(x)| < \delta M/2$ i $|g''(x)| < \frac{M}{\delta}$.
Wskazówka: Użyj odpowiedni splot.