

### Analiza matematyczna 2B, Lista 2

1. Uzasadnij że jeśli  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  są bezkwadratowe i parami względnie pierwsze i  $\alpha_i \neq -1$  dla  $i = k+1, \dots, m$ , to istnieją wielomiany  $S$  i  $T$  takie że

$$\int R \prod_i^m P_i^{\alpha_i} dx = \int S \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i} \prod_{i=k+1}^m P_i^{\alpha_i+1} dx + T \prod_{i=1}^m P_i^{\alpha_i+1}$$

przy tym  $T$  można wybrać tak by stopień  $T$  był mniejszy niż stopień  $\prod_{i=k+1}^m P_i$ .

2. W zależności

$$\int (ax+b)(Ax^2+Bx+C)^\alpha = \int (cx+d)((x-x_1)(x-x_2))^{\alpha+1} + (ex+f)((x-x_1)(x-x_2))^{\alpha+1}$$

wyznacz  $c, d, e, f$  w terminach  $a, b, A, B, C, \alpha$ .

3. Metodą Hermite'a oblicz całki:

$$\int \frac{7x-1}{(2x^2+2x+2)\sqrt{x^2+x+1}},$$
$$\int \frac{2x^3-9x^2-4x-10}{(2x^3+4x+2)\sqrt{x^3+2x+1}},$$
$$\int \frac{x^2+12x+2}{(3x^2-3x+9)\sqrt[3]{x^2-x+3}}.$$

4. Chcemy obliczyć całkę z  $R(x, y)dx$  gdzie  $R$  jest funkcją wymierną zaś  $y^2 = ax^2 + bx + c$ . Uzasadnij że biorąc  $z = y - \sqrt{ax}$  lub  $z = \frac{y-\sqrt{c}}{x}$  (to są dwa różne podstawienia) można wyliczyć  $x$  i  $y$  w terminach  $z$  i sprowadzić całkę do całki z funkcji wymiernych.

5. Za pomocą podstawienia sprowadź następujące całki do całki z funkcji wymiernych i oblicz je:

$$\int \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x-1}$$
$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\int \frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

6. Za pomocą podstawienia sprowadź następujące całki do całki z funkcji wymiernych i oblicz je:

$$\int \frac{e^{x^2} + 4e^x}{e^x + 3}$$
$$\int \frac{\sin(x)^2 - \sin(x) + \cos(x)^3}{\cos(x)^2 \sin(x) - \cos(x)^2}$$

7. Oblicz następujące całki:

$$\int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$$

8. Z 5 całek niżej 3 są błędne. Znajdź je bez obliczania całek czy różniczkowania prawej strony. Uzasadnij.

$$\int \frac{x+1}{2x\sqrt{\log(x)+x}} = x^2 + \log(\log(x)+x)$$

$$\int \frac{\exp(x)}{(x+\exp(x))^2} = \exp(x^2) + \frac{1}{x+\exp(x)}$$

$$\int \frac{-\log(x)+1}{\log(x)^2+2x\log(x)+x^2} = \frac{\log(x)}{\log(x)+x}$$

$$\int \frac{18\log(x)^2-18\log(x)-2}{x\log(x)^2-x} = 17\log\left(\frac{x}{\log(x)+1}\right) + \log\left(-\frac{x}{\log(x)-1}\right)$$

$$\int \frac{\log(x)}{\log(x)^2-x} = \log(\exp(x)+1) + \log(\log(x)^2-x)$$

9. Chcemy obliczyć  $\int R(x,y)dx$  gdzie  $y$  spełnia równanie  $P(x,y)=0$ . Uzasadnij że jeśli istnieje  $k > 1$  i  $S, T$  takie że  $R(x,y) = x^{k-1}S(x^k,y)$  i  $P(x,y) = T(x^k,y)$  to całkę możemy uprościć przez podstawienie. W szczególności

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} dx$$

można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych.