Analiza matematyczna 2B, Lista 4

1. Niech f będzie ograniczoną nieujemną funkcją nierosnącą. Uzasadnij że jeśli istnieje x_0 i $q < 1$ takie że dla $x \geq x_0$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(\exp(x))\exp(x)}{f(x)} \leq q$$

to całka

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

jest zbieżna. Jeśli dla $x > x_0$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(\exp(x))\exp(x)}{f(x)} \geq 1$$

to całka jest rozbieżna. Co wyjdzie dla funkcji

$$f(x) = \frac{(\log(\log(\log(x+1)+1)+1)+1)^\alpha}{(x+1)(\log(x+1)+1)(\log(\log(x+1)+1)+1)}$$

Wskazówka. Niech $x_k = \exp(x_{k-1})$ dla $k \geq 1$ i $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)$. Porównaj I_k z I_{k+1}.

2. Oblicz następujące całki

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2(x)dx.$$

3. Niech $f(x) = \frac{\exp(x)}{x+\exp(x)}$. Uzasadnij że $\int_{-\infty}^{\infty}(f(x+1) - f(x))dx$ jest zbieżna i jej wartość to 0.

4. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^a \sin(nx)dx = 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

5. Oblicz całki

$$\int_0^\infty \exp(-x)dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

$$\int_1^\infty x\exp(-x^2)dx.$$

6. Które z poniższych całek są zbieżne? Odpowiedź uzasadnij.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\exp(x)}{x}dx,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x)}{x} dx,$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\exp(x)}{x} dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \exp(-x^2) dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\exp(x)}{x + \exp(2x)} dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\exp(x) - 1} dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \sin(x) dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \sin(x^2) dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} x \sin(x^2) dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} x \sin(x^3) dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx,$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\log^3(x)} dx,$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\log(x)} dx$$

7 Oblicz granice

$$\lim_{a \to 0+} \int_{0}^{\infty} \sin(x) \exp(-ax) dx$$

$$\lim_{a \to 0+} \int_{0}^{\infty} \cos(x) \exp(-ax) dx$$