

Analiza matematyczna 2B, Lista 5

Proszę zrobić zadania z całkowania z książki H. Marcinkowskiej Analiza Matematyczna (zadania od strony 453 do 457 i od strony 497 do 498). Link do książki jest na końcu strony do wykładu. Ponadto zadania niżej.

1. Zakładamy że f jest dwukrotnie różniczkowana na przedziale $(-2, 2)$. Ponadto $|f''(x)| \leq M$ dla pewnej stałej M . Uzupełnij następujące rozumowanie

- Jeśli f jest parzysta to $f'(0) = 0$ i $|f'(1)| \leq M$
- Jeśli f jest jak w poprzednim punkcie i $f(1) = f(-1) = 0$ to $|f(x)| \leq \frac{1-x^2}{2}$ dla $x \in [-1, 1]$
- Jeśli f jest jak w poprzednim punkcie to $|\int_{-1}^1 f(x)dx| \leq \frac{M}{3}$
- $|\int_{-1}^1 f(x)dx - f(0) - f(1)| \leq \frac{2M}{3}$

Wywnioskuj stąd że jeśli $|f''(x)| \leq M$ na przedziale (a, b) to

$$|\int_a^b f(x)dx - (2n)^{-1}(b-a)(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh))| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

gdzie $h = \frac{b-a}{n}$. Uzasadnij że dla $n = 1$ tego oszacowania nie da się poprawić (tzn. nie da się zastąpić liczby 12 przez większą liczbę).

2. Oblicz granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\exp(\frac{k}{n}) + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{4}{3}} \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$$

3. Niech $a > 0$. Uzasadnij że poniższe wyrażenia nie zależą od a :

$$a \int_{-\frac{1}{a^2}}^{\frac{1}{a^2}} \exp(-a^2 x^2) dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$$

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} \frac{\exp(-ax)}{x} dx$$

4. Niech $f(x) = 1$ dla $|x-n| \leq \frac{1}{n}$ gdzie n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą i $f(x) = 0$ poza tym. Czy $\int_0^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna?

5. Czy poniższa całka jest zbieżna:

$$\int_1^{\infty} x^{\cos(x)-2} dx.$$

Wskazówka: Dla $x_0 = k\pi$ i małego $|x - x_0|$ porównaj $x^{\cos(x)-2}$ z $ck^{-1-\frac{(x-x_0)^2}{2}}$.
6 Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\log(2) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k})$$

Wskazówka: Użyj oszacowanie z zadania 1.