Analiza matematyczna 2B, Lista 6

1. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Funkję M na podzbiorach X defininujemy następująco: $M(A)$ to liczba elementów A jeśli A jest skończony zaś gdy A jest nieskończony to $M(A) = \infty$. Uzasadnij że M jest miarą zewnętrzną i że każdy podzbiór $A \subset X$ jest mierzalny.

2. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Funkcję M na podzbiorach X defininujemy następująco: $M(A) = 0$ jesli jeśli A jest skończony i $M(A) = 1$ w przeciwnym przypadku. Uzasadnij że M nie jest miarą zewnętrzną.

3. Niech X będzie zbiorem trójelementowym. Funkcję M na podzbiorach X defininujemy następująco: $M(A)$ to minimum z 2 i liczby elementów A. Uzasadnij że M jest miarą zewnętrzną i że jedyne podzbiory mierzalne X to $\emptyset$ i X.

4. Opisz najmniejszą algebrę podzbiorów prostej rzeczywistj zawierającą wszystkie odcinki otwarte.

5. Uzasadnij bezpośrednio (nie używając własności miary) że jeśli w definicji miary zewnętrznej Lebesgue'a zamieni się odcinki otwarte na dowolne odcinki to wartość miary zewnętrznej się nie zmieni.

6. Niech a_i będzie ciągiem liczb dodatnich takim że $s = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_i < 1$. Zbiory A_i budujemy następująco: A_i jest sumą 2^i odcinków domknętych równej długości, A_0 to odcinek $[0, 1]$, A_{i+1} otrzymujemy z A_i usuwając środkową część długości a_i z każdego z 2^i odcinków domkniętch w sume dających A_i. Niech $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$. Uzasadnij że jeśli C jest zawarte w sumie U pewnej skończonej rodziny odcinków domkniętych to $A_i \subset U$ dla dostatecznie dużych i. Uzasadnij że $M(C) = 1 - t > 0$ i że C nie zawiera żadnego odcinka.

7. Niech f będzie czterokrotnie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$. Zakładamy że istnieje stała M taka że $|f^{(4)}(x)| \le M$ dla każdego $x \in [a, b]$. Niech $c = \frac{a+b}{2}$. Uzasadnij że

$$|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^3 f''(c)}{24}| \le \frac{(b-a)^5 M}{2^4 5!}.$$

Niech n będzie liczną naturalną, $h = \frac{b-a}{n}$ i $x_i = a + \frac{2i+1}{2}h$. Uzasadnij że

$$|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + \alpha f''(x_i))| \le \frac{(b-a)^5 M}{n^4 2^4 5!}$$

gdzie $\alpha = \frac{h^2}{24}$. Wywnioskuj stąd że

$$|\int_a^b f(x)dx - \alpha(f'(b) - f'(a)) - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)| \le \frac{(b-a)^5 13M}{5760}.$$

Komentarz: Intuicyjnie oznacza to że metoda prostokątów jest bardzo dokładna w środku odcinka, zaś główny wkład do błędu dają końce odcinka.