Analiza matematyczna 2B, Lista 7

1. Uzasadnij że zbiór tych liczb z odcinka $[0,1]$ które w zapisie dziesiętnym nie używają cyfry 9 jest miary 0. Podobnie zbiór tych liczb rzeczywistych które w zapisie dziesiętnym cyfra 9 występuje tylko skończnie wiele razy. Uzasadnij że oba zbiory są nieprzeliczalne.

2. Niech S będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych zaś A_S będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych x że n-ta cyfra x po przecinku to 9 dla $n \in S$. Uzasadnij że dla nieskończonego S zbiór A_S jest nieprzeliczalny miary 0.

3. Niech A będzie zbiorem tych punktów w $\mathbb{R}^n$ które mają co najmniej jedną współrzędną wymierną. Uzasadnij że A jest zbiorem borelowskim (dokładniej jest typu F_σ).

4. Niech T będzie skończonym zbiorem (rodziną) zbiorem odcinków otwartych. Uzasadnij że istnieją podrodziny $T_1 \subset T$ i $T_2 \subset T$ takie że T_i jest rodziną odcinków rozłącznych i

$$\bigcup_{I\in T} I = \bigcup_{I\in T_1} I \cup \bigcup_{I\in T_2} I.$$

5. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Uzasadnij że zbiór tych x że f jest różniczkowalna w x jest zbiorem borelowskim (dokładniej, zbiorem G_δ).
Wskazówka: Jest to podobne do przykładu z punktami ciągłości, tyle że zamiast brać $|f(x) - q| \le \frac{1}{n}$ trzeba wziąść $|f(x) - ax - b| \le \frac{|I|}{n}$.

6. Uzasadnij że jeśli $A \subset [0,1]$ jest podzbiorem takim że A ma wspólny punkt z dowolnym nieprzeliczalnym podzbiorem domkniętym odcinka $[0,1]$, to A ma miarę zewnętrzną 1. Wywnioskuj stąd że jeśli zbiory A_1 i A_2 mają własność wyżej i są rozłączne, to A_1 i A_2 są niemierzalne.

7. Rodzina S składa się z podzbiorów $[0,1] \times [0,1]$ postaci $I \times [0,1]$ gdzie I jest podzbiorem otwartym $[0,1]$. Niech $\mathcal{B}$ będzie najmniejszą σ-algebrą zawierającą S. Uzasadnij że $A \in \mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy A jest postaci $B \times [0,1]$ dla pewnego borelowskiego $B \subset [0,1]$.

8. Niech C będzie klasycznym zbiorem Cantora, tzn. zbiorem tych liczb z przedziału $[0,1]$ które daje się zapisać przy podstawie 3 bez użycia cyfry 2. Uzasadnij że istnieje funkcja $F : [0,1] \mapsto [0,1]$ taka że $F(C) = [0,1]$, F jest ciągła i nierosnąca, tzn. dla $x \le y$ mamy $F(x) \le F(y)$. Wywnioskuj stąd że obraz zbioru mierzalnego przez funkcję ciągłą nie musi być zbiorem mierzalnym.
Komentarz: Obraz zbioru borelowskiego przez funkcję ciągłą zawsze jest zbiorem mierzalnym (choć nie musi być zbiorem borelowskim).

9. Niech $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą. Uzasadnij że obraz zbioru miary 0 przez F jest zbiorem miary 0. Wywnioskuj stąd że obraz zbioru mierzalnego przez F jest mierzalny.

10. Niech F będzie ciągła na odcinku $[0,1]$. Uzasadnij że jeśli $\int_a^b F(x)dx = 0$ dla dowolnych $a, b \in [0,1]$, to $F(x) = 0$ dla dowolnego $x \in [0,1]$.
Wskazówka: Uzasadnij że jeśli $f(x) > t$ to istnieją a, b takie że $x \in (a,b)$ i $f(y) > t$ dla $y \in (a,b) \cap [0,1]$.