Analiza matematyczna 2B, Lista 8

1. Uzasadnij że w $\mathbb{R}^n$ podprzestrzeń $n-1$ wymiarowa ma miarę 0.

2. Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Uzasadnij że wykres f jako podzbiór $[0,1]^2$ ma miarę 0.

3. Niech f będzie funkcją z $(0,1)$ w $(0,1)^n$ która liczbie majacej zapis dziesiętny $0.c_1c_2\dots$ przyporządkowuje wektor $(0.c_1c_{n+1}\dots, 0.c_2c_{n+2}\dots, \dots, 0.c_nc_{2n}\dots)$ Jeśli liczba ma dwa zapisy to wybieramy zapis mający nieskończenie wiele zer. Uzasadnij że obraz f ograniczonego do liczb niewymiernych zawiera wszystkie elementy $(0,1)^n$ które mają co najmniej jedną współrzędną niewynierną. Czy f ograniczona do liczb niewymiernych jest różnowartościowa?

4. Niech μ będzie miarą na przestrzeni X (dokładniej miarą na pewnej σ-algebrze podzbiorów X), zaś $f : X \mapsto Y$ dowolną funkcją. Funkcję ν na podzbiorach Y defininijemy jako $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ o ile $f^{-1}(A)$ należy do dziedziny μ. Uzasadnij że ν jest miarą na Y (w szczególności dziedzina ν to pewna σ-algebra podzbiorów Y).

5. Niech $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą. Niech A będzie sumą odcinków półotwartych $(a,b]$ takich że F jest stała na $(a,b]$. Uzasadnij że istnieje dokładnie jedna funkcja niemalejąca i prawostronnie ciągła G taka że $G(F(x)) = x$ dla $x \in \mathbb{R} - A$ określona na pewnym (skonczonym lub mieskończonym) przedziale. Pokaż że jeśli F jest rosnąca to G jest ciągła. Wywnioskuj stąd że istnieje dokładnie jedna miara μ na podzbiorach borelowskich prostej taka że $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$.

6. Niech μ będzie miarą na podzbiorach borelowskich $\mathbb{R}$ taką że $\mu((-\infty,b])$ jest skończone dla dowolnego b. Niech $F(b) = \mu((-\infty,b])$. Uzasadnij że $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ i że F jest niemalejąca i prawostronnie ciągła.

Komentarz: Wynik zadania 6 daje się uogólnić na miary takie że $\mu([a,b]) < \infty$ dla dowolnych skończonych a i b. Razem zadania 5 i 6 dają konstrukcję szerokiej klasy miar na $\mathbb{R}$.