Analiza matematyczna 2B, Lista 9

1. Uzasadnij że jeśli $A \subset [0,1]$ jest mierzalny, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rozdzina otwartych odcinków rozłącznych $\{I_i\}$ taka że przy $B = \sum_i I_i$ mamy $M_1(A - B) + M_1(B - A) < \varepsilon$.

2. Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ będzie funkcją zadaną wzorami $f(x) = 2x$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$ i $f(x) = 2(1-x)$ dla $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Niech $f^{-1}(A)$ oznacza przeciwobraz, zaś dla $n > 1$ niech $f^{-n}(A) = f^{-1}(f^{-(n-1)}(A))$. Uzasadnij że

1. Dla dowolnego odcinka $I \subset [0,1]$ mamy $M_1(f^{-1}(I)) = M_1(I)$.
2. Dla dowolenego mierzalnego $A \subset [0,1]$ mamy $M_1(f^{-1}(A)) = M_1(A)$.
3. Dla dowolnego odcinka I zbiór $I_n = f^{-n}(A)$ jest sumą 2^n odcinków, przy tym $I_n \cap [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ jest odcinkiem długości $2^{-n}M_1(I)$.
4. Dla dowolnych odcinków I i J mamy
$$\lim_{n\to\infty} M_1(J \cap f^{-n}(I)) = M_1(J)M_1(I)$$
5. Dla dowolnych mierzalnych $A, B \subset [0,1]$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} M_1(A \cap f^{-1}(B)) = M_1(A)M_1(B)$$

Wskazówka: punkt 5 wynika z 4 i zadania 1.

3. Niech f będzie funkcją mierzalną z $[0,1]$ w $[0,1]$ która ma mierzalą funkcję odwrotną i taką że $M_1(f(A)) = M_1(A)$. Niech $A \subset [0,1]$ będzie zbiorem dodatniej miary. Uzasadnij że istnieje taka dodatnie liczba całkowita n że $A \cap f^n(A)$ jest dodatniej miary. Niech

$$B = \{x :\in A : \exists_{n>0} f^n(x) \in A\}$$

Uzasadnij że $M_1(A - B) = 0$.
Wskazawka: Zauważ że zbiory $A, f(A), \ldots, f^n(A), \ldots$ nie mogą być rozłączne.

4. Uzasadnij że następujące funkcje są borelowsko mierzalne: część całkowita, część ułamkowa, pozycja pierwszej niezerowej cyfry, ilość początkowych jedynek w rozwinięciu dziesiętnym.

5. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Funkcję g defininujemy następująco:

$$g(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$$

Uzasadnij że g jest borelowsko mierzalna.

6. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Uzasadnij że pochodna f jest borelowsko mierzalna (tam gdzie jest zdefiniowana).

7. Niech X będzie dowolnym zbiorem zaś A_i, $i = 1, \ldots$ będą podzbiorami X. Niech

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} 1_{A_i}$$

Uzasadnij że $f(x) \in [0,1]$ i że przeciwobraz $F^{-1}(A)$ dowolnego podzbioru borelowskiego $A \subset [0,1]$ należy do σ-algebry generowanej przez rodzinę A_i. Załóżmy dodatkowo A_i rozdzielają punkty X, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$, takich że

$x \neq y$ istnieje i takie że $1_{A_i}(x) \neq 1_{A_i}(y)$. Uzasadnij że wtedy f jest różnowartościowa. Ponadto dla każdego i istnieją podzbiory borelowskie odcinka B_i takie że $A_i = f^{-1}(B_i)$ (jako B_i można wziąść skończoną sumę pewnych odcinków). Jeśli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową zaś A_i tworzą bazę topologii X to A_i rozdzielają punkty. Wywnioskuj stąd że f i odwrotność f są borelowsko mierzalne jako funkcje pomiędzy X i $f(X)$ (mówimy wtedy że X i $f(X)$ są borelowko izomorficzne).
Komentarz: Podana wyżej funkcja nazywana jest funkcją Marczewskiego.
8. Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, zaś μ będzie miarą na podzbiorach borelowskich X taką że $\mu(X) = 1$. Uzasadnij że instnieje podziór $A \subset [0,1]$ i funkcja borelowsko mierzalna $f : A \mapsto X$ taka że dla dowolnego borelowskiego $B \subset X$ mamy $\mu(B) = M_1(f^{-1}(B))$ gdzie M_1 oznacza miarę zewnętrzną Lebesgue'a.
Wskazówka: Użyj poprzednie zadanie by otrzymać A, f i miarę ν na A taką że $\mu(B) = \nu(f^{-1}(B))$. Następnie użyj zadania 5 i 6 z poprzedniej listy by zastąpić ν przez M_1.
9. Niech X będzie przestrzenią z miarą zaś E_i będą zbiorami rozłącznymi takimi że $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X$. Uzasadnij że dla dowolnej funkcji mierzalnej $f : X \mapsto [0, \infty]$ mamy równość

$$\int f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f.$$

10. Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto [0, \infty]$ będzie funkcją mierzalną. Uzasadnij że instnieją funkcje borelowsko mierzalne g i h takie że $h \leq f \leq g$ i $\int (g - h) = 0$.