Analiza matematyczna 2B, Odpowiedzi na pytania

1. Wiadomo że f ma całką która jest funkcją elementarną zaś g nie ma całki elementarnej. Czy $f + g$ może mieć całkę elementarną?
Nie. Gdyby $f + g$ miało całkę elementarną I, zaś f miało całkę elementarną J to $I - J$ byłoby całką elementarną z g co dałoby sprzeczność z założeniem.

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Czy przeciwobraz $f^{-1}(A)$ zbioru A mierzalnego względem miary Lebesgue'a musi być mierzalny?
Nie. Jeśli obraz f jest miary zero to dowolny podzbiór obrazu jest mierzalny, czyli przeciwobraz dowolnego zbioru byłby mierzalny. Ale jeśli f to rzut z plaszczyny na prostą (czyli obraz to prosta, a więc obraz jest miary zero jako podzbiór płaszczyzny), to przeciwobraz niemierzalego podzbioru prostej nie jest mierzalny.

3. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zaś A będzie zbiorem domkniętym miary Lebesgue'a 0. Czy obraz $f(A)$ może zawierać odcinek?
Tak. Zbudowanie jednego z przykładów było treścią zadanie 8 z listy 7.

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Czy przeciwobraz $f^{-1}(A)$ zbioru borelowskiego A musi być zbiorem borelowskim?
Tak. To jeden z podstawowych faktów, który sobie udowodniliśmy i wielokrotnie z niego korzystaliśmy.

5. Niech $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Czy obraz zbioru otwartego przez f musi być zbiorem mierzalnym względem miary Lebesgue'a?
Tak. Podzbiór otwarty $\mathbb{R}^2$ można przedstawić jako przeliczalną sumę zbiorów zwartych. Obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą jest domknięty. A więc obraz podzbioru otwartego $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem F_σ, czyli jako przeliczalna suma zbiorów domkniętych jest mierzalny.

6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną. Wiadomo że $f \in L^1$ i $f \in L^3$. Czy wynika stąd że $f \in L^2$.
Tak. Wynika to z nierówności Höldera. Nieco ogólniejszy wynik był treścią zadania 3 z listy 11.

7. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Czy f musi być funkcją mierzalną?
Nie. Pokazaliśmy sobie że mierzalna f spełniająca taki warunek jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnego rzeczywistego a. Było też powiedziane że istnieją inne funkcje spełniające ten warunek i one muszą być niemierzalne.

8. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą. Czy f musi być funkcją mierzalną?
Tak. Funkcja rosnąca ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości. Po usunięciu punktów nieciągłości z dziedziny dostaniemy funkcję ciągłą, a więc mierzalną. Lecz zachowanie na przeliczalnym zbiorze nie wpływa na mierzalność, więc f jest też mierzalna.

9. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{2}$. Czy f musi być funkcją mierzalną?
Tak. Funkcja spełniająca warunek Höldera jest ciągła, a wiec mierzalna.

10. Niech A będzie podzbiorem prostej nie zawierającym żadnego odcinka. Czy wynika stąd że suma kompleksowa $A + A = \{x + y : x, y \in A\}$ nie zawiera żadnego odcinka.
Nie. Na wykładzie było pokazane że jeśli A ma miarę dodatnią to $A + A$ zawiera odcinek. Łatwo daje się zbudować zbiory miary dodatniej nie zawierające odcinka, np. bierzemy zbiór liczb niewymiernych.
Komentarz: Można też zbudować zbiór miary zero taki że $A+A$ zawiera odcinek. Mianowicie, niech B będzie podzbiorem odcinka $[0, 1]$ składającym się z tych

liczb których każda parzysta cyfra w zapisie przy podstawie 2 to 0, zaś C składa się z tych liczb których każda nieparzysta cyfra w zapisie przy podstawie 2 to 0. Latwo pokazać że $[0,1] = B + C$ i że B oraz C są miary 0. Wtedy $A = B \cup C$ jest miary 0 i $[0,1] \subset A + A$.