1 Motywacja

Całka Riemanna ma liczne ograniczenia. Całka (i miara) Lebesgue'a je w dużym stopniu usuwa. Po pierwsze, całka Lebesgue'a zachowuje się dobrze względem przejść granicznych. Mamy np.

Fakt Jeśli f_n i f są ciągłe na $[a,b]$ i $f_n(x) \to f(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$ i $|f_n(x)| \leq M$ dla pewnej stałej M to

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Ten fakt nie ma prostego dowodu w ramach teorii Riemanna. W teorii Lebesgue'a dowód bardziej ogólnego wyniku pojawia się w sposób naturalny.

Po drugie, całka Riemanna jest określona tylko dla stosunkowo regularnych funkcji. Np. funkcja $f(x)$ taka że $f(x) = 1$ gdy x jest liczbą wymierną i $f(x)$ równe 0 poza tym nie jest całkowalna w sensie Riemanna. Analogicznie do definicji całki Riemanna można przypisać zbiorom miarę (na prostej długość, na płaszczyźnie powierzchnię, w przestrzeni objętość). Otrzymaną miarę nazywa się miarą Jordana. Jednakże klasa zbiorów dla których miara Jordana jest określona jest dość wąska, np. zbiór liczb wymiernych należących do odcinka $[0,1]$ nie jest mierzalny w sensie Jordana. Miara Lebesgue'a jest określona na bardzo szerokiej klasy zbiorów – w zasadzie dla wszystkich zbiorów które się pojawiają w normalnych rozumowaniach matematycznych. Podobnie całka Lebesgue'a jest określona dla bardzo szerokej klasy funkcji (w szczególności wyżej wspomniana funkcja f jest całkowalna i ma całkę 0).

Po trzecie, w wielu zagadnieniach dostatecznie małe zbiory są do pominięcia. Np. zmiana wartości funkcji w jednym punkcie nie zmienia całki Riemanna. W teorii Lebesgue'a jest pojęcie zbioru miary 0. Zmiana funkcji na takim zbiorze nie zmienia całki. W wielu rozumowanich można pomijać zachowanie funkcji na zborze miary 0. Zbiory skończone czy przeliczalne mają miarę 0 (czyli zbiór liczb wymiernych ma miarę 0), ale istnieją też nieprzeliczalne zbiory miary 0.

2 Miara zewnętrzna

Lemat 2.1 *Jeśli* $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$, *to* $b - a < \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Dowód. Odcinki (a_i, b_i) ustawiamy po kolei w ten sposób że $a \in (a_1, b_1)$, zaś dla $i > 1$ mamy $b_{i-1} \in (a_i, b_i)$. Mianowicie, z założenia że $[a,b]$ jest zawarty w sume (a_i, b_i) istnieje takie i że $a \in (a_i, b_i)$. Przenumerowując odcinki możemy więc założyć że $a \in (a_1, b_1)$. Podobnie postępując rekursywnie wybieramy odcinek i nadajemy mu numer $i + 1$ tak że $b_i \in (a_{i+1}, b_{i+1})$. Ta procedura się zatrzyma gdy zabraknie odcinków albo nie będzie istniał odcinek do którego należy b_i. Z założenia jest to możliwe tylko gdy $b_i > b$. Wtedy zastępujemy n przez i i ignorujemy pozostałe odcinki (jeśli takie istnieją). Możemy to zrobic bo suma długości się co najwyżej zmniejszy, więc jak dostaniemy wynik dla zmniejszonej rodziny to będzie on prawdziwy też dla oryginalnej. A więc możemy zakładać że $a \in (a_1, b_1)$, dla $i > 1$ mamy $b_i \in (a_i, b_i)$ i $b_n > b$. Teraz indukcyjnie pokażemy że

$$b_i - a < \sum_{j=1}^{i} (b_j - a_j).$$

Dla $i = 1$ jest to jasne, bo $a \in (a_1, b_1)$ oznacza że $a_i < a$ czyli $b_1 - a < b_1 - a_1$. Krok indukcyjny jest podobny: $b_i \in (a_{i+1}, b_{i+1})$ oznacza że $a_{i+1} < b_i < b_{i+i}$ czyli $b_{i+i} - b_i < b_{i+i} - a_{i+1}$ a więc

$$b_{i+i} - a = (b_{i+i} - b_i) + (b_i - a) < (b_{i+i} - a_{i+1}) + (b_i - a).$$

Z założenia indukcyjnego $b_i - a < \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)$, więc

$$b_{i+i} - a < (b_{i+i} - a_{i+1}) + (b_i - a) < (b_{i+i} - a_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{i+1}(b_j - a_j)$$

co kończy krok indukcyjny. Dla $i = n$ mamy teraz

$$b - a < b_n - a < \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

□

Oznaczenie: Niech $I = (a, b)$. Długość $(b - a)$ odcinka I będziemy oznaczać przez $|I|$.

Definicja. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Miarę zewnętrzną Lebesgue'a $M(A)$ definiujemy jako

$$M(A) = \inf_{S} \sum_{I \in S} |I|$$

gdzie infimum przebiega wszystkie przeliczalne rodziny odcinków otwartych takie że $A \subset \bigcup_{I \in S} I$.

Komentarz: $M(A) \in [0, \infty]$, tzn. miara zewnętrzna może być nieskończona, np. $M(\mathbb{R}) = \infty$.

Lemat 2.2 $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego i z definicji infimum istnieje przeliczalna rodzina odcinków otwartych S_i taka że $A_i \subset \bigcup_{I \in S_i} I$ i

$$M(A_i) + 2^{-i}\varepsilon > \sum_{I \in S_i} |I|$$

Niech $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Wtedy $A \subset \bigcup_{I \in S} I$ i

$$M(A) \leq \sum_{I \in S} |I| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{I \in S_i} |I| \leq \sum_{i=1}^{\infty}(M(A_i) + 2^{-i}\varepsilon)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

Ponieważ ε jest dowolne oznacza to że

$$M(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

□

Lemat 2.3 *Jeśli $A \subset B$ to $M(A) \leq M(B)$.*

Dowód: Jeśli $B \subset \bigcup_{I \in S} I$, to również $A \subset \bigcup_{I \in S} I$, więc infimum w definicji $M(A)$ jest brane po większym lub równym zbiorze niż w definicji $M(B)$. □

Lemat 2.4 $M(\emptyset) = 0$.

Dowód: Bierzemy $S = \emptyset$. Wtedy $\sum_{I \in S} |I| = 0$. □

Definicja: Niech X będzie zbiorem. Funkcję $M : 2^X \mapsto [0, \infty]$ nazywamy miarą zewnętrzną wtedy i tylko wtedy gdy

- $M(\emptyset) = 0$
- Jeśli $A \subset B$ to $M(A) \leq M(B)$
- $M(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$

To co pokazaliśmy wyżej oznacza że miara zewnętrzna Lebesgue'a jest miarą zewnętrzną.

Pokażamy jeszcze kilka własności miary zewnętrznej Lebesgue'a.

Lemat 2.5 $M(\{a\}) = 0$.

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy $\{a\} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. A więc biorąc $S = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}$ dostaniemy $M(\{a\}) \leq 2\varepsilon$. Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolne oznacza to że $M(\{a\}) = 0$.

Lemat 2.6 $M((a, b)) = (b - a)$.

Dowód: Jeśli $I = (a, b)$ i $S = \{I\}$, to $I = \sum_{J \in S} J$ i

$$M(I) \leq \sum_{J \in S} |J| = |I| = (b - a).$$

A więc wystarczy pokazać że $M((a, b)) \geq (b - a)$. Oznaczmy $I = [a, b]$. Mamy

$$M(I) = M([a, b]) \leq M((a, b)) + M(\{a\}) + M(\{b\}).$$

Na mocy poprzedniego lematu $M(\{a\}) = M(\{b\}) = 0$, czyli $M(I) \leq M((a, b))$. A więc wystarczy pokazać że $M(I) \geq (b - a)$. Niech S będzie przeliczalną rodziną odcinków otwartych taką że $I \subset \bigcup_{J \in S} J$. Na mocy lematu Borela istnieje skończona podrodzina $S_0 \subset S$ taka że $I \subset \bigcup_{J \in S_0} J$. Dla rodziny S_0 na mocy lematu 1 mamy

$$(b - a) < \sum_{J \in S_0} |J|$$

a więc również

$$(b - a) < \sum_{J \in S} |J|.$$

To oznacza że $(b-a)$ jest ograniczeniem dolnym dla $\sum_{J\in S}|J|$, w więc

$$(b-a) \leq \inf_S \sum_{J\in S} |J| = M(I).$$

$\square$

Lemat 2.7 *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem prostej. Dla dowolnego $\delta > 0$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina odcinków otwartych $\{I_i\}$ taka że*

$$A \subset \bigcup_i I_i,$$

$\sum_i |I_i| \leq M(A) + \varepsilon$ i $|I_i| \leq \delta$ dla każdego i.

Dowód: Z definicji infimum istnieje taka przeliczalna rodzina odcinków otwartych S że

$$\sum_{J\in S} |J| \leq M(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odcinki z rodziny S numerumy otrzymując ciąg J_l, $l = 1, \ldots$. Każdy z odcinków J_l dzielmy na części długości mniejszej niż δ. Te części nieco powiększamy, otrzymując rodzinę odcinków otwartych R_l, taką że $J_l \subset \bigcup_{I\in R_l} I$ i $\sum_{I\in R_l}|I| \leq |J_l| + 2^{-l-1}\varepsilon$ i dla każdego $I \in J_l$ mamy $|J| < \delta$. Niech $T = \bigcup_{l=1}^{\infty} R_l$. Odcinki I_i otrzymujemy numerując odcinki z rodziny T. Wtedy

$$\sum |I_i| = \sum_{I\in T} |I| = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{I\in R_l} |I| \leq \sum_{l=1}^{\infty} (|J_l| + 2^{-l-1}\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} |J_l| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + M(A) + \frac{\varepsilon}{2} = M(A) + \varepsilon,$$

$$A \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} |J_l| \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{I\in R_l} I = \bigcup_{I\in T} I = \bigcup_i I_i.$$

Wreszcie, na mocy konstrukcji R_l mamy $|I_i| \leq \delta$. $\square$

Defincja: Zbiór E nazywamy mierzalnym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru A zachodzi równość $M(A \cap E) + M(A - E) = M(A)$.

Lemat 2.8 *Dowolny odcinek $E = (a, b)$ jest mierzalny.*

Dowód: Ustalmy zbiór A. Wystarczy pokazać że $M(A\cap E) + M(A - E) \leq M(A)$ (bo nierówność w przeciwną stronę zachodzi dla dowolnych zbiorów). Niech $\varepsilon > 0$ i $J = (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Mamy

$$M(E - J) \leq M((a, a + \varepsilon]) + M([b - \varepsilon, b)) = 2\varepsilon.$$

Następnie

$$M(A\cap E) \leq M(A\cap J) + M(A\cap(E-J) \leq M(A\cap J) + M(E-J) \leq M(A\cap J) + 2\varepsilon.$$

Niech $\{I_i\}$ będzie rodziną odcinków taką że $M(A) \leq \varepsilon + \sum_i |I_i|$ i każdy z I_i ma długość $< \varepsilon$. Taka rodzina istnieje na mocy Lematu 2.7. Zauważmy że jeśli $I_i \cap J \neq \emptyset$ to $I_i \cap (A - E) = \emptyset$ (bo odległość dowolnego punktu z $A - E$ do J wynosi co najmniej ε. Niech $\Lambda = \{i : I_i \cap (A - E) \neq \emptyset\}$ i $\Delta = \{i : I_i \cap J \neq \emptyset\}$. Wtedy

$$A \cap J \subset \bigcup_{i \in \Delta} I_i$$

i

$$A - E \subset \bigcup_{i \in \Lambda} I_i$$

i $\Lambda \cap \Delta = \emptyset$. A wiec

$$M(A \cap J) \leq \sum_{i \in \Delta} |I_i|,$$

$$M(A - E) \leq \sum_{i \in \Lambda} |I_i|$$

czyli

$$M(A \cap J) + M(A - E) \leq \sum_i |I_i| \leq \varepsilon + M(A).$$

Ale stąd wynika że

$$M(A \cap E) + M(A - E) \leq 2\varepsilon + M(A \cap J) + M(A - E) \leq 3\varepsilon + M(A).$$

Ponieważ ε jest dowolny wynika stąd że

$$M(A \cap E) + M(A - E) \leq M(A)$$

czyli

$$M(A \cap E) + M(A - E) = M(A).$$

Ponieważ A jest dowolny wynika stąd że E jest mierzalny. □

Definicja. Niech X będzie zbiorem. Rodzinę podzbiorów zbioru X nazywamy algebrą zbiorów jeśli jest zamknięta na dopełnienie i sumy skończone. Rodzinę podzbiorów zbioru X nazywamy σ-algebrą jesli jest algebrą zbiorów i jest zamknięta na sumy przeliczalne.

Lemat 2.9 *Algebra zbiorów jest zamknięta na skończone iloczyny, różnicę i różnicę symetryczną zbiorów. σ-algebra jest dodatkowo zamknięta na przeliczalne iloczyny. Jeśli rozdzina podzbiorów X zawiera X i jest zamknięta na skończone iloczyny i różnicę symetryczną to jest algebrą zbiorów. Jeśli ta rodzina jest dodatkowo zamknięta na przeliczalne iloczyny to jest σ-algebrą.*

Dowód: Na mocy prawa de Morgana dla zbiorów mamy

$$A \cap B = X - ((X - A) \cup (X - B))$$

czyli iloczyn można obliczyc za pomocą sumy i dopełnienia. $A - B = A \cap (X - B)$, czyli różnicę można wyrazić za pomocą iloczynu i dopełnienia, a więc również w terminach sumy i dopełnienia. Różnica symetryczna to $(A - B) \cup$

$(B - A)$ a więc również można ją wyrazić w terminach sumy i dopełnienia. To łącznie daje zamkniętość algebry zbiorów na skończone iloczyny, różnicę i różnicę symetryczną. Przeliczalne iloczyn można wyrazić w terminach sumy i dopełnienia:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X - \bigcup_{i=1}^{\infty}(X - A_i)$$

czyli σ-algebra jest zamknięta na przeliczalne iloczyny. Jeśli rozdzina podzbiorów X zawiera X i jest zamknięta na różnicę symetryczną to jest też zamknięta na dopełnienie, bo $X - A$ to różnica symetryczna X i A. Teraz używając prawa de Morgana pokazujemy że jeśli to rodzina jest dodatkowo zamknięta na iloczyny skończone to jest zamknięta na sumy skończone, czyli jest algebrą zbiorów. Jeśli dodatkowo ta rodzina jest zamknięta na iloczyny przeliczalne to prawo de Morgana pokazujemy jest zamknięta na sumy przeliczalne, czyli jest σ-algebrą. $\square$

Komentarz. Różnica symetryczna jest przemienna, łączna i rozdzielna względem iloczynu zbiorów. Iloczyn zbiorów jest przemienny i łączny. A więc algebra zbiorów jest pierścieniem przemiennym, gdy różnicę symetryczną weźniemy jako dodawanie a iloczyn jako mnożenie. Dodatkowo X jest jedynką. Ponadto $\emptyset$ i X razem dają ciało dwuelementowe, czyli algebra zbiorów jest algebrą nad ciałem dwuelementowym. Ale nietrywialna algebra zbiorów, czyli taka która zawiera element A różny od $\emptyset$ i X nie jest ciałem, bo $(1 - A)A = (X - A) \cap A = \emptyset = 0$ a założnia $A \neq 0$ i $X - A \neq 0$, czyli mamy dzielniki zera.

Definicja. Funkcję M określoną na pewnej σ-algebrze i przyjmującą wartości w $[0, \infty]$ nazywamy miarą (dodatnią) jeśli dla dowolnego ciągu zbiorów rozłącznych A_i z σ-algebry mamy

$$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

i dla pewnego A mamy $M(A) < \infty$

Komentarz: Z tej definicji wynika że $M(\emptyset) = 0$. Mianowicie, biorąc A taki że $M(A) < \infty$ i przyjmując $A_1 = A$, $A_i = \emptyset$ dla $i = 2, \dots$ mamy

$$M(A) = M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = M(A) + \sum_{i=2}^{\infty} M(\emptyset)$$

Ale szereg z prawej strony może być zbieżny tylko gdy $M(\emptyset) = 0$. Wiedząc że $M(\emptyset) = 0$ widzimy że

$$M(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

dla rozłącznych A_i (bo dla $i > n$ bierzemy $A_i = \emptyset$ i stosujemy przeliczalną addytywność). Ponadto jeśli $A \subset B$ to $M(A) \leq M(B)$. Mianowicie, $B = A \cup (B - A)$ gdzie składniki są rozłączne, więc

$$M(B) = M(A) + M(B - A) \geq M(A).$$

Lemat 2.10 *Rodzina zbiorów mierzalnych jest zamknięta na operacje dopełnienia i sumy przeliczalnej. Ponadto M obcięte do zbiorów mierzalnych jest miarą.*

Dowód: Najpierw pokażemy że suma dwu zbiorów mierzalnych jest mierzalna. Mianowicie niech E_1 i E_2 będą zbiorami mierzalnymi zaś A będzie dowolnym zbiorem. Na mocy mierzalności E_i mamy

$$M(A) = M(A \cap E_1) + M(A - E_1),$$

$$M(A - E_1) = M((A - E_1) \cap E_2) + M((A - E_1) - E_2)$$

czyli

$$M(A) = M(A \cap E_1) + M((A - E_1) \cap E_2) + M((A - E_1) - E_2).$$

Lecz $(A - E_1) - E_2 = A - (E_1 \cup E_2)$, czyli

$$M((A - E_1) - E_2) = M(A - (E_1 \cup E_2)).$$

Na mocy mierzalności E_1

$$M(A \cap (E_1 \cup E_2)) = M((A \cap (E_1 \cup E_2)) \cap E_1) + M((A \cap (E_1 \cup E_2)) - E_1)$$

lecz

$$(A \cap (E_1 \cup E_2)) \cap E_1 = A \cap E_1$$

i

$$(A \cap (E_1 \cup E_2)) - E_1 = (A \cap E_2) - E_1 = (A - E_1) \cap E_2$$

czyli

$$M(A \cap (E_1 \cup E_2)) = M(A \cap E_1) + M((A - E_1) \cap E_2).$$

Łącznie

$$M(A) = (M(A \cap E_1) + M((A - E_1) \cap E_2)) + M((A - E_1) - E_2) =$$

$$= M(A \cap (E_1 \cup E_2)) + M(A - (E_1 \cup E_2))$$

co pokazuje że $E_1 \cup E_2$ jest mierzalny.

Wprost z definicji widać że dopełnienie zbioru mierzalnego jest mierzalne. Ponieważ iloczyn zbiorów to dopełnienie sumy dopełnień to również iloczyn dwu zbiorów mierzalnych jest mierzalny. Ponieważ różnica E_1 i E_2 to iloczyn dopełnienia E_2 z E_1 to rownież różnica zbiorów mierzalnych jest mierzalna. Niech E_i, $i = 1, \ldots$ będzie ciągiem rozłącznych zbiorów mierzalnych zaś A będzie dowolnym zbiorem. Indukcyjnie pokażemy że dla dowolnego n mamy

$$M(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} M(A \cap E_i).$$

Mianowicie, dla $n = 1$ równość jest natychmiastowa. Jako że E_i są rozłączne mamy równość

$$(A \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) - E_{n+1} = (A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i)$$

a więc ze względu na mierzalność E_{n+1}

$$M(A\cap\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i)=M((A\cap\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i)\cap E_{n+1})+M((A\cap\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i)-E_{n+1})=$$

$$=M(A\cap E_{n+1})+M(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=M(A\cap E_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}M(A\cap E_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}M(A\cap E_i)$$

co daje krok indukcyjny.

Następnie

$$\sum_{i=1}^{n}M(A\cap E_i)=M(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\le M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

Ponieważ lewa strona jest sumą częściową szeregu o wyrazach nieujemnych oznacza to że

$$\sum_{i=1}^{\infty}M(A\cap E_i)\le M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

Ponieważ M jest miarą zewnętrzną mamy również

$$M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=M(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap E_i))\le\sum_{i=1}^{\infty}M(A\cap E_i)$$

a więc

$$M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}M(A\cap E_i).$$

Ze względu na mierzalność $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ mamy

$$M(A)=M(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\ge M(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)$$

$$\ge\sum_{i=1}^{n}M(A\cap E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

Jak wyżej z nieujemności wyrazów szeregu

$$M(A)\ge\sum_{i=1}^{\infty}M(A\cap E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

Ponieważ miara zewnętrzna jest podaddytywna to zachodzi też nierówność

$$M(A)\le M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)$$

czyli łącznie

$$M(A)=M(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)+M(A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

Ponieważ otrzymaliśmy tą równość dla dowolnego A, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ jest mierzalny. Jeśli E_i, $i = 1, \dots$ są dowolnymi zbiorami mierzalnymi to piszemy $F_i = E_i - \bigcup_{i=1}^{i-1} E_i$. Wtedy F_i są rozłączne i mierzalne i $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, a więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ jest mierzalny. A więc pokazaliśmy że rodzina zbiorów mierzalnych jest zamknięta ze względu na dopełnienie i sumy przeliczalne. Pozostaje pokazać że M ograniczone do zbiorów mierzalnych jest miarą czyli M jest przeliczalnie addytywna czyli że jeśli E_i są rozłącznymi zbiorami mierzalnymi to

$$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(E_i).$$

Ale wyżej pokazaliśmy że dla dowolnego A dowolnego

$$M(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A \cap E_i).$$

Biorąc $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ widzimy że

$$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = M(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(E_i).$$

□

Lemat 2.11 *Niech A_i, $i = 1, \dots$ będzie ciągiem zbiorów mierzalnych. Jeśli $A_i \subset A_{i+1}$ dla dowolnego i to*

$$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i M(A_i) = \lim_{i \to \infty} M(A_i).$$

Jeśli $A_{i+1} \subset A_i$ dla dowolnego i i $M(A_i) < \infty$ to

$$M(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \inf_i M(A_i) = \lim_{i \to \infty} M(A_i).$$

Dowód: Rozważmy przypadek gdy $A_i \subset A_{i+1}$, czyli A_i tworzą ciąg niemalejący. Niech $E_1 = A_1$ i $E_i = A_i - A_{i-1}$ dla $i > 1$. E_i są rozłączne, bo dla $i > j$ mamy $E_j \subset A_j \subset A_{i-1}$. Mamy $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = A_n$, a więc

$$M(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = M(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(E_i) = \sup_n \sum_{i=1}^{n} M(E_i) =$$

$$= \sup_n M(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sup_n M(A_n) = \lim_{i \to \infty} M(A_i)$$

co daje pierwszą część. Jeśli $M(A_1) < \infty$ i A_i tworzą ciąg nierosnący to oznaczając $B_i = A_1 - A_i$ i używając prawo de Morgana mamy

$$M(A_1 - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = M(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sup_i M(B_i) = M(A_1) - \inf_i M(A_i)$$

i

$$M(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = M(A_1) - M(A_1 - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) =$$
$$= M(A_1) - (M(A_1) - \inf_i M(A_i)) = \inf_i M(A_i).$$

□

3 Zbiory borelowskie

Definicja: Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Najmniejszą σ-algebrę zawierającą zbiory otwarte nazywamy σ-algebrą zbiorów borelowskich. Mówimy że zbiór jest zbiorem borelowskim wtedy i tylko wtedy gdy należy do σ-algebry zbiorów borelowskich.

Komentarz: Przekrój dowolnej rodziny σ-algebr jest σ-algebrą, więc σ-algebra zbiorów borelowskich to przekrój wszystkich σ-algebr zawierających zbiory otwarte. Równoważnie, zbiór jest zbiorem borelowskim jeśli można go wyprodukować ze zbiorów otwartych wielokrotnie biorąc dopełnienia i sumy przeliczalne.

Lemat 3.1 *Rodzina podzbiorów borelowskich prostej to najmniejsza σ-algebra zawierająca wszystkie odcinki otwarte.*

Dowód: Każdy podzbiór otwarty prostej jest przeliczalną sumą odcinków otwartych, a więc σ-algebra zawierająca odcinki otwarte zawiera też podzbiory otwarte prostej, a więc i wszystkie zbiory borelowskie. σ-algebra zbiorów borelowskich zawiera odcinki, więc najmniejsza σ-algebra zawierająca odcinki jest zawarta w σ-algebrze zbiorów borelowskich, co łącznie daje równość. □

Definicja zbiorów borelowskich na charakter indukcyjny i w związku z tym dowody twierdzeń o zbiorach borelowskich też mają charakter indukcyjny. Mianowicie, dowodząc że zbory borelowskie mają pewną własność W najpierw musimy mieć jakiś punkt początkowy, czyli pokazać własność W np. dla odcinków (czy od razu dla zbiorów otwartych). Następnie pokazujemy że dopełnienie zbioru mającego własność W też ma własność W i że przeliczalna suma zbiorów mających własność W też ma własność W (co odpowiada krokowi indukcyjnemu w zwykłej indukcji). Wtedy wiemy że rozdzina zbiorów mających własność W jest σ-algebrą i zwiera odcinki a więc zawiera też wszystkie zbiory borelowskie, czyli każdy zbiór borelowski ma własność W. W przypadku zwykłej indukcji jeśli chcemy pokazać jakąś własność dla podzbioru liczb naturalnych, to możemy mieć kłopot bo podzbiór może być zbyt mały. Podobnie próba ograniczenia się do mniejszej rodziny zbiorów niż zbiory borelowskie może prowadzić do kłoptów bo rozumowanie indukcyjne wyprowadziło by nas poza rodzinę i dlatego nie da się zastosować.

Lemat 3.2 *Każdy podzbiór borelowski prostej jest mierzalny.*

Dowód: Rodzina zbiorów mierzalnych jest σ-algebrą i zawiera odcinki a więc i zbiory borelowskie. □

Lemat 3.3 *Niech X będzie dowolnym zbiorem, Z podzbiorem X, zaś S rodziną podzbiorów X. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ najmiejszą σ-algebrę podzbiorów X zawierającą S zaś przez $\mathcal{B}$ najmiejszą σ-algebrę podzbiorów Z zwierajcą rodzinę $S_Z = \{A \cap Z : A \in S\}$. Wtedy $\mathcal{B} = \{A \cap Z : A \in \mathcal{A}\}$.*

Dowód: Niech $\mathcal{A}_Z = \{A \cap Z : A \in \mathcal{A}\}$. Jako że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą $\mathcal{A}_Z$ jest zamknięta na dopełnienie i sumy przeliczalne, a więc jest σ-algebrą. Ponadto $\mathcal{A}_Z$ zawiera S_Z, a więc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_Z$. Aby otrzymać zawieranie w przeciwną stronę rozważmy rodzinę zbiorów $\mathcal{C} = \{A \subset X : A \cap Z \in \mathcal{B}\}$. Jako ze $\mathcal{B}$ jest σ-algebrą to $\mathcal{C}$ też jest σ-algebrą. Ponadto $\mathcal{C}$ zawiera S, a więc $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, czyli dla każdego $A \in \mathcal{A}$ mamy $A \cap Z \in \mathcal{B}$, czyli $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{B}$. $\square$

Lemat 3.4 *Niech X będzie przestrzenią topologiczną zaś Z podzbiorem X. Wtedy B jest podzbiorem borelowskim Z jeśli jest postaci $A \cap Z$ dla pewnego A borelowskiego w X. Ponadto każdy zbiór tej postaci jest borelowski w Z. Jesli Z jest podzbiorem borelowskim X to B jest borelowski w Z wtedy i tylko wtedy gdy B jest borelowski jako podzbiór X.*

Dowód. Niech S będzie rodziną zbiorów otwarych w X. Z definicji topologii podprzestrzeni każdy podzbiór otwarty Z jest postaci $U \cap Z$ dla $U \in S$. A więc pierwsza część wynika z Lematu 3.3. Jeśli Z jest borelowski i A jest borelowski to $A \cap Z$ jest borelowski, czyli na mocy pierwszej części każdy podzbiór borelowski Z jest borelowski jako podzbiór X. Jeśli $A \subset Z$ jest borelowski jako podzbiór X to $A = A \cap Z$ jest również borelowski jako podzbiór Z. $\square$

Przykład: Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Pokażemy że zbiór A tych punktów gdzie f jest ciągła jest zbiorem borelowskim (G_δ). Z definicji f jest ciągła w x oznacza że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_y(|x-y| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

W tej defincji wartość $f(x)$ jest dla nas niewygodna, bo chcemy ogranczyć zależność od x. Zauważmy że zamiast jawnie napisać $f(x)$ możemy napisać

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\exists_{a\in\mathbb{R}}\forall_y(|x-y| < \delta \implies |f(y) - a| < \varepsilon).$$

Mianowicie, definicja ciągłości implikuje warunek wyżej, bo skoro $f(x)$ działa, to biorąc $a = f(x)$ dostaniemy prawdę. Ale $f(y)-f(x) = (f(y)-a)-(f(x)-a)$, wiec warunek wyżej implikuje że $|f(y)-f(x)| < 2\varepsilon$. Ale czynnik 2 jest nieistonny bo warunek ma zachodzić dla dowolnego ε.

Również niewygodne jest to że zmienne objęte kwantyfikatormi przebiegają liczby rzeczywiste. Ponieważ dowolnie blisko liczby rzeczywistej można znaleźć liczbę wymierną, to możemy zastąpić $a \in \mathbb{R}$ przez $q \in \mathbb{Q}$. Podobnie, zamiast ε możemy użyć $\frac{1}{n}$ z naturalmym n. Po zmianie otrzymujemy warunek:

$$\forall_n\exists_{\delta>0}\exists_{q\in\mathbb{Q}}\forall_y(|x-y| < \delta \implies |f(y) - q| < \frac{1}{n}).$$

Popatrzy teraz na warunek

$$\forall_y(|x-y|<\delta \implies |f(y)-q|<\frac{1}{n}).$$

Ten warunek oznacza że nierówność $|f(y)-q|<\frac{1}{n}$ zachodzi dla dowolnego $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Dokładna postać odcinka nie odgrywa roli, możemy zastąpić $(x-\delta, x+\delta)$ przez odcinek o końcach wymiernych. Podobnie nie jest istotne że x jest środkiem, wystarczy że x leży w środkowej części odcinka. Dla odcinka I oznaczmy przez $2I$ odcinek o tym samym środku, ale dwa razu dłuższy. Wtedy możemy napisać

$$x \in I \wedge \forall_{y\in 2I}|f(y)-q|<\frac{1}{n}.$$

Łącznie:

$$\forall_n \exists_I \exists_{q\in\mathbb{Q}} x \in I \wedge \forall_{y\in 2I}|f(y)-q|<\frac{1}{n}$$

gdzie I przebiega odcinki otwarte o końcach wymiernych. Niech $S_{n,q}$ oznacza zbiór odcinków otwartych o końcach wymiernych takich że

$$\forall_{y\in 2I}|f(y)-q|<\frac{1}{n}.$$

Oznaczmy

$$V_{n,q} = \bigcup_{I\in S_{n,q}} I,$$

$$U_n = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} V_{n,q}.$$

Wtedy f jest ciągła w x jest równoważne

$$x \in A = \bigcap_n U_n.$$

Mianowicie

$$x \in A \iff \forall_n x \in U_n \iff \forall_n \exists_{q\in\mathbb{Q}} x \in V_{n,q} \iff$$

$$\iff \forall_n \exists_{q\in\mathbb{Q}} \exists_I (x \in I) \wedge I \in S_{n,q} \iff$$

$$\iff \forall_n \exists_I \exists_{q\in\mathbb{Q}} x \in I \wedge \forall_{y\in 2I}|f(y)-q|<\frac{1}{n}$$

co jest wyprowadzonym wyżej warunkiem ciągłości.

Zauważmy że $V_{n,q}$ i U_n są otwarte, więc A jest zbiorem G_δ a więc borelowskim.

Lemat 3.5 *Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy*

$$M(A) = \inf_{U:A\subset U} M(U)$$

gdzie infimum przebiega zbiory otwarte. Istnieje zbiór borelowski G taki że $A \subset G$ i $M(A) = M(G)$. Jeśli A jest mierzalny to

$$M(A) = \sup_{K\subset A} M(K)$$

gdzie supremum przebiega zbiory zwarte. Istnieje zbiór borelowski F takie że $F \subset A$ i $M(A) = M(F)$. Ponadto borelowskie F i G można wybrać tak by $F \subset A \subset G$ i $M(G - F) = 0$. Innymi słowy, zbiór mierzalny można przedstawić jako sumę zbioru borelowskiego i zbioru miary 0, albo jako różnicę zbioru borelowskiego i zbioru miaru 0.

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji miary zewnętrznej istnieje przeliczalna rodzina przedziałów otwartych S taka że $A \subset \bigcup_{I \in S} I = U$ i

$$\sum_{I \in S} |I| \leq M(A) + \varepsilon.$$

Lecz U jako suma odcinków otwartych jest zbiorem otwartym i na mocy przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej

$$M(U) \leq \sum_{I \in S} |I| \leq M(A) + \varepsilon.$$

Czyli

$$M(A) \leq \inf_{U: A \subset U} M(U) \leq M(A) + \varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolne, to

$$M(A) = \inf_{U: A \subset U} M(U).$$

Teraz niech $\varepsilon_i = 2^{-i}$ i U_i będzie zbiorem otwartym takim że $A \subset U_i$ i $M(U_i) \leq M(A) + \varepsilon_i$. Bierzemy $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Wtedy G jest zbiorem borelowskim, $A \subset G$ i dla dowolnego i mamy

$$M(A) \leq M(G) \leq M(U_i) \leq M(A) + \varepsilon_i$$

czyli

$$M(G) \leq \inf_i (M(A) + \varepsilon_i) = M(A) + \inf_i \varepsilon_i = M(A)$$

a więc $M(A) = M(G)$.

Niech teraz A będzie zbiorem mierzalnym. Najpierw rozpatrzymy przypadek gdy $A \subset [a, b]$, czyli A jest podzbiorem pewnego (skończonego) odcinka domkniętego. Niech $\varepsilon > 0$. Na mocy pierwszej części lematu istnieje zbiór otwarty G taki że $([a, b] - A) \subset G$ i

$$M(G) \leq M([a, b] - A) + \varepsilon.$$

Teraz niech $K = [a, b] - G$. K jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, a więc jest zwarty. Również $K \subset A$. Mamy

$$M(K) \geq M([a, b]) - M(G) \geq M([a, b]) - M([a, b] - A) - \varepsilon = M(A) - \varepsilon$$

a więc

$$M(A) - \varepsilon \leq \sup_{K \subset A} M(K).$$

Jako że $\varepsilon > 0$ jest dowolne, to

$$M(A) = \sup_{K \subset A} M(K).$$

Jeśli A jest dowolnym zbiorem mierzalnym, to biorąc $A_i = [-i, i] \cap A$ mam $A = \sum_i A_i$. Ponieważ A_i tworzą ciąg wstępujący to na mocy Lematu 2.11 mamy

$$M(A) = \sup_i M(A_i).$$

Stosując do A_i już udowodnioną część lematu mam

$$M(A_i) = \sup_{K \subset A_i} M(K) \leq \sup_{K \subset A} M(K)$$

a więc

$$M(A) = \sup_i M(A_i) = \sup_i \sup_{K \subset A_i} M(K) \leq \sup_i \sup_{K \subset A} M(K) = \sup_{K \subset A} M(K)$$

czyli

$$M(A) \leq \sup_{K \subset A} M(K).$$

Nierówność w przeciwną stronę jest jasna bo $M(K) \leq M(A)$, wiec

$$M(A) = \sup_{K \subset A} M(K).$$

Teraz niech $\varepsilon_i = 2^{-i}$. Dla każdego i wybieramy zwarty K_i tak by $K_i \subset A$ i $M(A) \leq M(K_i) + \varepsilon_i$. Niech $F = \sum K_i$. Wtedy F jest borelowski jako suma przeliczalna zbiorów domkniętych, $F \subset A$ i dla dowolnego i mamy

$$M(F) \geq M(K_i) \geq M(A) - \varepsilon_i$$

czyli

$$M(F) \geq \sup_i (M(A) - \varepsilon_i) = M(A) - \inf_i \varepsilon_i = M(A)$$

co oznacza że $M(F) = M(A)$.

Chcemy teraz pokazać że borelowskie F i G można wybrać tak by $F \subset A \subset G$ i $M(G - F) = 0$. Jeśli zbiór A ma miarę skończoną to wynik łatwo dostaniemy z już udowodnionej części lematu. Mianowicie, istnieją zbiory borelowskie F i G takie że $F \subset A \subset G$ i $M(F) = M(G) = M(A)$. Wtedy $M(G - F) = M(G) - M(F) = 0$. Ogólnie, niech $A_i = [-i, i] \cap A$. Na mocy tego co już pokazaliśmy istnieją zbiory borelowskie F_i i G_i takie że $F_i \subset A_i \subset G_i$ i $M(G_i - F_i) = 0$ Niech $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ i $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Wtedy F i G są zbiorami borelowskimi i $G - F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - F_i)$ a więc

$$M(G - F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(G_i - F_i) = 0.$$

□

Lemat 3.6 *Jeśli rodzina zbiorów S jest zamknięta na iloczyny skończone, zaś rodzina $\mathcal{L}$ jest najmniejszą rodziną taką że $\mathcal{L}$ zawiera S, jest zamknięta na przeliczalne monotonicze sumy zbiorów, $X \in \mathcal{L}$ i dla $A, B \in \mathcal{L}$ z $B \subset A$ wynika że $A - B \in \mathcal{L}$ to $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą.*

Dowód. Wystarczy pokazać że $\mathcal{L}$ jest zamknięta na iloczyn. Mianowiecie, z założnia $\mathcal{L}$ jest zamknięta na dopełnienie, więc z prawa de Morgana będzie zamknięta na sumy skończone. Sumę przeliczalną $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ możemy zapisać jako sumę monotoniczną sum skończonych

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i} A_i$$

więc $\mathcal{L}$ będzie też zamknięta na sumy przeliczalne a więc będzie σ-algebrą. Aby pokazać że $\mathcal{L}$ jest zamknięta na iloczyn dla $A \in \mathcal{L}$ rozważny rodzinę $\mathcal{L}_A = \{B \in \mathcal{L} : B \cap A \in \mathcal{L}\}$. Rodzina $\mathcal{L}_A$ jest zamknięta na sumę monotoniczną, bo jeśli $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ jest sumą monotoniczną o składnikach z $\mathcal{L}_A$ to również

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$$

jest sumą monotoniczną o składnikach z $\mathcal{L}$, a więc $A \cap B \in \mathcal{L}$ czyli $B \in \mathcal{L}_A$. Podobnie jesli $B \subset C$ i $C, B \in \mathcal{L}_A$ to

$$A \cap (C - B) = (A \cap C) - (A \cap B)$$

a więc $A \cap (C - B) \in \mathcal{L}$, czyli $C - B$ in $\mathcal{L}_A$, A więc $\mathcal{L}_A$ jest zamknięta na te same operacje co $\mathcal{L}$. Ponadto $X \in \mathcal{L}_A$. Dla $A \in S$, ponieważ S jest zamknięty na iloczyn to $S \subset \mathcal{L}_A$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest najmniejszą rodziną zbiorów zawierającą S i zamkniętą na operacje z założenia to $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$, czyli dla $A \in S$ i $B \in \mathcal{L}$ mamy $A \cap B \in \mathcal{L}$. Oznacza to że jeśli $A \in \mathcal{L}$ to $S \subset \mathcal{L}_A$, czyli jak wyżej $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$. A więc dla $A, B \in \mathcal{L}$ również $A \cap B \in \mathcal{L}$, czyli $\mathcal{L}$ pokazaliśmy że $\mathcal{L}$ jest zamknięte na iloczyn. □

Lemat 3.7 *Niech μ_i. $i = 1, 2$ będą miarami na na pewnych σ-algebrach podziorów X. Jeśli S jest rodziną podzbiorów X taką że S jest zamknięta na iloczyny, X jest przeliczalną sumą elementów z S i dla każdego $A \in S$ mamy $\mu_1(A) = \mu_2(A) < \infty$ to $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ dla A z najmniejszej σ-algebry zawierającej S.*

Dowód: Niech $A \in S$ i $\mathcal{L}_A$ będzie rodziną podzbiorów $B \subset A$ takich że obie miary są zdefiniowane dla B i $\mu_1(B) = \mu_2(B)$. Zauważny że na mocy Lematu 2.11 $\mathcal{L}_A$ jest zamknięta na sumy monotoniczne. Z założenia na zbiorach z S miary się zgadzają więc skoro $A \in S$ to $A \in \mathcal{L}_A$. Jeśli $C, B \in \mathcal{L}_A$ i $B \subset C$ to biorąc $D = C - B$ mam

$$\mu_i(C) = \mu_i(C - B) + \mu_i(B)$$

czyli

$$\mu_i(C - B) = \mu_i(C) - \mu_i(B).$$

Ponieważ miary powyżej są skończone (bo są to miary podzbiorów A a z założenia A ma miarę skończoną) to odejmowanie jest wykonalne i

$$\mu_1(C - B) = \mu_1(C) - \mu_1(B) = \mu_2(C) - \mu_2(B) = \mu_2(C - B)$$

czyli również $C - B \in \mathcal{L}_A$. W więc $\mathcal{L}_A$ spełnia założenia Lematu 3.6 z S zastąpionym przez $S_A = \{B \cap A : B \in S\}$, czyli $\mathcal{L}_A$ zawiera σ-algebrą generowaną przez S_A. Niech B będzie elementem σ-algebry generowanej przez S. Na mocy Lematu 3.3 zbiór $A \cap B \in \mathcal{L}_A$. Niech teraz $A_i \in S$ będą takie że $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i niech $B_i = B \cap (A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_i)$. B_i są rozłączne i należą do σ-algebry generowanej przez S więc jak wyżej $B_i \in \mathcal{L}_{A_i}$, czyli

$$\mu_1(B_i) = \mu_2(B_i).$$

Jednakże $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, więc

$$\mu_1(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i) = \mu_2(B).$$

A więc obie μ_i są zdefiniowane i równe na B. To daje wynik, jako że B jest dowolnym elementem σ-algebry generowanej przez S. □

Lemat 3.8 *Jeśli μ jest miarą na pewnej σ-algebrze podziorów $\mathbb{R}$ zawierającej wszystkie odcinki otwarte, i $\mu(I) = |I|$ dla dowolnego odcinka otwartego, to $\mu(A) = M(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego. Jeśli dowolny podzbiór zbioru A takiego że $\mu(A) = 0$ jest μ-mierzalny, to μ jest określona dla każdego zbioru A mierzalnego względem miary Lebesgue'a i $\mu(A) = M(A)$.*

Dowód: Zastosujem Lemat 3.7 do miary $\mu = \mu_1$ i μ_2 będącej miarą Lebesgue'a. Jako S bierzemy rodzinę wszystkich odcinków otwartych. S jest zamknięta na iloczyny. Prosta jest przeliczalną sumą odzinków postaci $(-i, i)$. Z założenia miary się zgadzają i są skończone na odcinkach, a więc zgadzają się na σ-algebrze generowanej przez odcinki czyli na zbiorach borelowskich.

Załóżmy dodatkowo dowolny podzbiór zbioru A takiego że $\mu(A) = 0$ jest μ-mierzalny i niech B będzie taki że $M(A) = 0$. Wtedy istnieje borelowski A taki że $B \subset A$ i $M(B) = 0$. A więc $\mu(B) = 0$ i A jako podzbiór B jest μ-mierzalny, a więc $\mu(A) \leq \mu(B) = 0$, czyli A jest μ-miary 0. Teraz miech A będzie dowolnym zbiorem mierzalnym względem miary Lebesgue'a. Istnieje borelowski F taki że $M(A - F) = 0$, w więc $A - F$ jest μ-miary 0 i $\mu(A) = \mu(F) + \mu(A - F) = \mu(F) = M(F) = M(A)$. □

4 Funkcje mierzalne

Niech teraz X będzie przestrznią z miarą określoną na pewnej σ-algebrze $\mathcal{M}$ podzbiorów X. Mówiąc że zbiór A jest mierzalny będziemy przez to rozumieli że $A \in \mathcal{M}$. Interesujący nas przypadek to $X = \mathbb{R}^n$ z miarą Lebesgue'a, ale wygodniej jest używać bardziej ogólne oznaczenia.

Definicja: Niech Y będzie ośrodkową przestrzenią metryczną.

Funkcję $f : X \mapsto Y$ nazywamy mierzalną wtedy i tylko wtedy $f^{-1}(G)$ jest mierzalny dla dowolnego zbioru borelowskiego G. Funkcję f nazywamy borelowsko mierzalną jeśli przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego jest borelowsko mierzalny.

Lemat 4.1 *Funkcja $f : X \mapsto Y$ jest borelowsko mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest borelowsko mierzalny. W szczególności funkcja ciągła jest borelowsko mierzalna. Podobnie f jest mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest mierzalny.*

Dowód: Najpierw rozważmy f taką że przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest borelowsko mierzalny. Niech $\mathcal{N}$ będzie rodziną takich pozbiorów $A \subset Y$ że $f^{-1}(A)$ jest zbiorem borelowskim. Z założenia zbiory otwarte należą do $\mathcal{N}$. Ale $\mathcal{N}$ jest σ-algebrą. Mianowicie

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

i

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

czyli $\mathcal{N}$ jest zamknięta na dopełnienie i sumy przeliczalne. czyli zbiory borelowskie należą do $\mathcal{N}$. A więc przeciwobraz zbioru borelowskiego jest borelowski. Z definicji f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty. Ale zbiory otwarte są borelowskie, czyli ciągła f spełnia założenia pierwszej części lematu. Dowód mierzalności f jest podobny. $\square$

Lemat 4.2 *Jeśli $f : X \mapsto \mathbb{R}$ jest takie że $f^{-1}((t, \infty))$ jest (borelowsko) mierzalny dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ to f jest (borelowsko) mierzalna.*

Dowód. Pokażemy wersję mierzalną (wersja borelowska jest analogiczna). Najpierw zauważmy że

$$f^{-1}([t, \infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(t - \frac{1}{n}, \infty))$$

a więc $f^{-1}([t, \infty))$ jest mierzalne. Następnie $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, \infty)) - f^{-1}([b, \infty))$, a więc również $f^{-1}((a, b))$ jest zbiorem mierzalnym.

Dowolny podzbiór otwarty U prostej jest przeliczalną sumą odcinków otwartych, więc $f^{-1}(U)$ jako przeliczalna suma jest zbiorem mierzalnym. Teraz mierzalność f wynika z poprzedniego lematu. $\square$

Lemat 4.3 *Jeśli I jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, Y_i dla $i \in I$ są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi, $Y = \prod_{i \in I} Y_i$, $f_i : X \mapsto Y$ są (borelowsko) mierzalne, $F : X \mapsto Y$ jest takie że i-ta współrzędna $F(x)$ to $f_i(x)$, to F jest (borelowsko) mierzalna.*

Dowód: Pokażemy wersję borelowską (wersja mierzalna jest podobna). Wystarczy pokazać że przeciwobraz zbioru otwartego jest borelowsko mierzalny. Lecz Y można wyposarzyć w strukturę przestrzeni metrycznej ośrodkowej, toteż każdy podzbiór otwarty Y jest przeliczaną sumą zbiorów bazowych. A więc wystarczy pokazać że przeciwobrazy elementów bazy są borelowsko mierzalne.

Standartową bazą topologi w Y są zbiory postaci $V = \prod_{i_I} U_i$ gdzie U_i jest otwarty w Y_i i tylko dla skończenie wielu i zbiór U_i jest różny od Y_i. Zauważmy że

$$F^{-1}(V) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(U_i).$$

Jako że f_i jest borelowsko mierzalne to $f_i^{-1}(U_i)$ jest borelowsko mierzalny, a więc i $F^{-1}(V)$ jako przeliczalny przekrój zbiorów borelowskich jest borelowski. $\Box$

Lemat 4.4 *Superpozycja funkcji borelowsko mierzalnych jest borelowsko mierzalna. Jeśli $f : Y \mapsto Z$ jest borelowsko mierzalna a $g : X \mapsto Y$ jest mierzalna to $f \circ g$ jest mierzalna.*

Dowód: Niech $A \subset Z$ będzie zbiorem borelowskim i niech $B = f^{-1}(A)$. Jako że f jest borelowsko mierzalna to B jest zbiorem borelowskim. Jeśli g jest mierzlna to

$$(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(B)$$

jest zbiorem mierzalnym na mocy mierzalności g, a więc $f \circ g$ jest mierzalna. Podobnie gdy g jest borelowsko mierzalna. $\Box$

Lemat 4.5 *Niech $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ gdzie są (borelowsko) mierzalne. Niech $f_i : X_i \mapsto Y$ będzie (borelowsko) mierzalna. Zakładamy że $f_i(x) = f_j(x)$ dla $x \in X_i \cap X_j$ (jest to spełnione np. gdy X_i są rozłączne). Wtedy istnieje funkcja $f : X \mapsto Y$ taka że $f(x) = f_i(x)$ dla $x \in X_i$. Ponadto f jest (borelowsko) mierzalna.*

Dowód: Zauważmy że skoro $f_i(x) = f_j(x)$ dla $x \in X_i \cap X_j$ to warunek $f(x) = f_i(x)$ dla $x \in X_i$ jednoznacznie definiuje f. A więc istnienie f jest jasne i trzeba tylko pokazać mierzalność. Niech G będzie zbiorem borelowskim. Mamy

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(G).$$

Lecz $f_i^{-1}(G)$ jest (borelowsko) mierzalnym podzbiorem X_i. Jako że X_i jest (borelowsko) mierzalny to $f_i^{-1}(G)$ również jest (borelowsko) mierzalnym podzbiorem X. A więc $f^{-1}(G)$ jest (borelowsko) mierzalny jako suma przeliczalna zbiorów (borelowsko) mierzalnych $\Box$

Lemat 4.6 *Niech $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$. Jeśli f i g są (borelowsko) mierzalne to suma, różnica, iloczyn, maksimum i minimum f i g jest (borelowsko) mierzalny. Jeśli $g(x) \neq 0$ dla dowolnego x to iloraz f i g jest (borelowsko) mierzalny.*

Dowód: Odwzorowanie $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ w produkt jest mierzalne na mocy Lematu 4.3. Operacje arytmetyczne są superpozycją tego odwzorowania z odpowiednią funkcją dwuargumentową. Suma, różnica, iloczyn, maksimum i minimum są funkcjami ciągłymi dwu zmiennych, a wiec dla nich wynik dostajemy z lematu o superpozycji. Jeśli $g(x) \neq 0$ dla dowolnego x to iloraz jest superpozycją z funkcją ϕ taką że $\phi(x,y) = \frac{x}{y}$ dla $y \neq 0$ i $\phi(x,0) = 0$. ϕ jest borelowsko mierzalna na mocy poprzedniego lematu. □

Oznaczenie: Kula $B(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$.

Lemat 4.7 *Jeśli $f_i : X \mapsto Y$ jest ciągiem funkcji mierzalnych (lub borelowsko mierzalnych) i dla każdego $x \in X$ mamy*

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$$

to f jest mierzalna (lub odpowiednio borelowsko mierzalna).

Dowód: Niech G będzie otwartym podzbiorem Y. Z definicji jeśli $y \in G$ to istnieje kula $B(y,r) \subset G$. Niech $G_y = B(y, \frac{r}{2})$. Mamy $G = \sum_y G_y$. Jako że Y jest przestrzenią ośrodkową to istnieje ciąg y_j taki że $G = \sum_{j=1}^{\infty} G_{y_j}$. Oznaczmy $U_j = G_{y_j}$ Jeśli $f(x) \in G$ to istnieje j taki że $f(x) \in U_j$. Jako że U_j jest zbiorem otwartym to z definicji zbieżności istnieje n takie że dla $i \geq n$ mamy $f_i(x) \in U_j$. A więc

$$x \in f_i^{-1}(U_j)$$

dla $i \geq n$. Z tego wynika że

$$x \in \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j)$$

i konsekwentnie

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j).$$

A więc jako że x był dowolnym elementem X takim że $f(x) \in G$ to

$$f^{-1}(G) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j).$$

Chcemy pokazać że mamy nie tylko zawieranie ale rowność. Niech $f(x) \notin G$ i ustalmy j. Zgodnie z podanym określeniem $U_j = B(y, \frac{r}{2})$ dla pewnego $y \in G$ i r takiego że $B(y,r) \subset G$. A więc $d(f(x), y) \geq r$. Z definicji zbiezności istnieje n takie że dla $i \geq n$ mamy $d(f_i(x), f(x)) < \frac{r}{2}$. Wtedy

$$d(f_i(x), y) \geq d(f(x), y) - d(f_i(x), f(x)) > \frac{r}{2}$$

czyli $f_i(x) \notin B(y, \frac{r}{2}) = U_j$. A więc $x \notin f_i^{-1}(U_j)$, czyli również dla dowolnego m mamy

$$x \notin \bigcap_{i=m}^{\infty} f_i^{-1}(U_j).$$

Jako że j jest dowolne oznacza to że

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j)$$

czyli że

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j)$$

Ale z założenia $f_i^{-1}(U_j)$ jest mierzalny, więc

$$\bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(U_j)$$

jako przeliczalny iloczyn zbiorów mierzalnych jest mierzalny. Dalej, $f^{-1}(G)$ jako przeliczalna suma zbiorów mierzalnych jest mierzalny. Ale jako że G jest dowolnym zbiorem otwartym oznacza to że f jest mierzalna. Dla funkcji borelowsko mierzalnych argument jest podobny. $\square$

5 Miara Lebesge'a na $\mathbb{R}^n$

Przypominam że dowolną nieujemną liczbę rzeczywistą można zapisać w układzie dziesiętnym:

$$a = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i(a) 10^{-i}.$$

Jeśli a jest niewymierana, to $c_i(a)$ są wyznaczone jednoznacznie, jeśli a jest wymierna, to są do najwyżej dwie możliwości: jedna gdzie wszystkie $c_i(a)$ za wyjątkiem skończnie wielu są równe 0 i druga gdzie wszystkie $c_i(a)$ za wyjątkiem skończnie wielu są równe 9. Jeśli umówimy się że preferujemy zapis z zerami, to $c_i(a)$ będą zdefiniowane jednoznacznie. A więc w ten sposób otrzymujmy ciąg funkcji $c_i(a) : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Oznaczenie: Przez N oznaczymy zbiór liczb niewymiernych.

Lemat 5.1 *c_i obcięta do zbioru N liczb niewymiernych jest ciągła.*

Dowód: C_i ma skoki w punktach postaci $k10^{-1}$ gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś pomiędzy nimi jest stała. A więc c_i jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym. Czyli po obcięciu do zbioru liczb niewymiernych c_i jest ciągła w każdym punkcie, a więc ciągła. $\square$

Ustalmy $n > 1$. Funkcję f na $[0, 1)$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$ definiujemy następująco: $f(a) = (h_0(a), \ldots, h_{n-1}(a))$ gdzie

$$h_k(a) = \sum_i c_{k+ni} 10^{-i}.$$

Natępnie ustalmy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbami całkowitymi a punktami w $\mathbb{R}^n$ o współrzędnych całkowitych (można to zrobić bo zbiór punktów o współrzędnych całkowitych jest przeliczalny). W ten sposób otrzymujemy odwzorwanie $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. g można tak wybrać by $h(0) = 0$. Teraz jeśli $a = l + a_0$ gdzie $l \in \mathbb{Z}$ i $a_0 \in [0, 1)$ to $f(a) = g(l) + f(a_0)$.

Lemat 5.2 *f obcięta do zbioru N liczb niewymiernych jest ciągła.*

Dowód: W wyrażeniu na f składnik $g(l)$ jest stały na przedziałach postaci $(l, l+1)$, więc wystarczy pokazać że składnik $f(a_0)$ jest ciągły, co z kolei wystarczy zrobić dla $a \in N \cap (0, 1)$. Teraz wystarczy pokazać że h_k obcięta do $N \cap (0, 1)$ jest ciągła. Ale na przedziałach ograniczonych szereg definiujący h_k jest zbieżny jednostajnie (bo majoryzuje się przez zbieżny szereg liczbowy $\sum_{i=-m}^{\infty} 9(10^{-i})$). Skoro c_i obcięta do N jest ciągła to h_k jako suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest ciągła. $\square$

Dotychczas zdefiniowaliśmy miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^1$ a chcemy ją zdefiniwać na $\mathbb{R}^n$. Aby odróżnić już zdefiniowaną miarę na $\mathbb{R}^1$ oznaczymy ją przez M_1, zaś miarę na $\mathbb{R}^n$ (którą chcemy zdefiniować) oznaczymy przez M_n.

Definicja: Powiemy że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest M_n-mierzalny jeśli $f^{-1}(A)$ jest M_1-mierzalny. Przy tym dla zbioru M_n-mierzalnego przyjmiemy

$$M_n(A) = M_1(f^{-1}(A)).$$

Lemat 5.3 *Jeśli A jest borelowsko mierzalny to A jest M_n-mierzalny*

Dowód: $f^{-1}(A) = (f^{-1}(A) \cap N) \cup (f^{-1}(A) - N)$. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, więc $f^{-1}(A) - N$ jako podzbiór zbioru liczb wymiernych jest przeliczalny, czyli mierzalny (miary 0). f obcięta do N jest ciągła, więc $f^{-1}(A) \cap N$ jest podzbiorem borelowskim N, czyli jako zbiór borelowski jest mierzalny. $\square$

Lemat 5.4 *Jeśli A jest M_n mierzalny to*

$$M_n(A) = \inf_{U:A \subset U} M_n(U) = \sup_{K \subset A} M_n(K)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte, zaś K zwarte. Ponadto istnieją zbory borelowskie F i G takie że $F \subset A \subset G$ i $M_n(G - F) = 0$.

Dowód. Niech $B = f^{-1}(A)$. Na mocy Lematu 3.5 istnieje ciąg zbiorów zwartych $L_i \subset B \cap N$ taki że

$$\sup_i M_1(L_i) = M_1(B \cap N) = M_1(B).$$

Niech $K_i = f(L_i)$. Jako że f jest ciągła na N to K_i jest zwarty. Mamy $L_i \subset f^{-1}(K_i)$, czyli

$$M_n(A) = M_1(B) = \sup_i M_1(L_i) \leq \sup_i M_1(f^{-1}(K_i)) = \sup_i M_n(K_i).$$

Lecz $K_i \subset A$, więc

$$M_n(A) = \sup_i M_n(K_i).$$

Jeśli A jest podzbiorem zbiory otwartego G o mierze skończonej to wtedy

$$M(A) = M(G) - M(G-A) = M(G) - \sup_{K \subset G-A} M(K) = \inf_{K \subset G-A} M(G-K).$$

Lecz $U = G - K$ jest zbiorem otwartym zawierającym A, czyli

$$M(A) = \inf_{U: A \subset U} M(U).$$

Jeśli $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ gdzie każde G_i jest otwarte o mierze skończonej to ustalamy $\varepsilon > 0$. Na mocy poprzedniej części dla każdego i istnieje zbiór otwarty U_i taki że $M_n(U_i - A) \leq \varepsilon 2^{-i}$ i $A \cap G_i \subset U_i$. Niech $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Wtedy $A \subset U$ i

$$M_n(U - A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_n(U_i - A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon.$$

Czyli

$$M_n(A) \leq M_n(U) \leq M_n(A) + \varepsilon$$

i

$$M_n(A) \leq \varepsilon + \inf_{U: A \subset U} M(U).$$

Jako że ε jest dowolne to

$$M_n(A) \leq \inf_{U: A \subset U} M(U).$$

Łatwo zobaczyć że przeciwobraz przez f zbioru ograniczonego jest ograniczony (jest on sumą skończonej rodziny odcinków), więc jesli G jest ogramiczonym zbiorem otwartym to $M_n(G) < \infty$. Lecz $\mathbb{R}^n$ można przdstawić jako przeliczalną sumę ograniczonych zbiorów otwartych, więc piewsza część lematu zachodzi dla dowolnego mierzalnego A. Dowód drugiej części jest podobny do dowodu drugiej części Lematu 3.5 $\square$

Lemat 5.5 *Niech $i \geq 0$ będzie liczbą całkowitą i niech K będzie domkniętą kostką o boku 10^{-i} taką że jej wierzchołki mają współrzędne postaci $k10^{-i}$ gdzie k jest liczbą całkowtą. Wtedy istnieje liczba całkowita l taka że*

$$(l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni}) \subset f^{-1}(K)$$

i

$$f^{-1}(U) \subset (l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})$$

gdzie U jest wnętrzem K.

Dowód: Najpierw pokażemy że dla dowolnego całkowitego l istnieje kostka K jak wyżej, taka że

$$f((l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})) \subset K$$

Zauważmy że dla $a \in (l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})$ mamy $f(a) = f(l10^{-ni}) + f(a_1)$ gdzie $a_1 = a - l10^{-ni} \in (0, 10^{-ni})$. Następnie $f(a_1) = 10^{-i} f(a_2)$ gdzie $a_2 = 10^i a_1 \in (0,1)$. Dla $a \in (0,1)$ mamy $c_i(a) = 0$ dla $i \leq 0$, czyli

$$h_k(a) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{k+ni} 10^{-i} \leq 9 \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = 1.$$

A więc $f((0,1)) \subset [0,1]^n$ i $f((0,10^{-ni}) \subset [0,10^{-i}]^n$. Jako że $10^i f(l10^{-ni})$ ma współrzędne całkowite oznacza to że $f((l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni}))$ jest podzbiorem kostli takiej postaci jak K. Zmieniając l otrzymamy rózne kostki. Zauważmy że aby otrzymać kostkę K musimy dobrać by $f(l10^{-ni})$ było minimalym wierchołkiem kostki. Ale gdy l przebiega liczby całkowite z przedziału $[0, 10^{ni})$ to $f(l10^{-ni})$ przebiega wszyskie punkty $[0,1)^n$ o współrzędnych mających i cyfr po przecinku, a więc dla dowolnej $K \subset [0,1]^n$ można znaleźć l i jest ono jednoznaczne. Dla ogólnego K najpierw znajdujemy l_1 tak by $K - g(l_1) \subset [0,1]^n$ (takie l_1 istnieje i jest jednoznaczne na mocy własności g), a następnie l_2 tak by $f((l_2 10^{-ni}, (l_2+1)10^{-ni}) \subset K - g(l_1)$. Wtedy dla $l = 10^{ni} l_1 + l_2$ mamy

$$f((l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})) \subset K$$

czyli

$$(l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni}) \subset f^{-1}(K)$$

co daje pierwszą część. Następnie, jeśli $m \neq l$ to $f((m10^{-ni}, (m+1)10^{-ni}))$ jest podzbiorem kostki domkniętej K_m podobnej do K, ale różnej od K. K_m jest rozłączne z U, a więc

$$(m10^{-ni}, (m+1)10^{-ni}) \cap f^{-1}(U) = \emptyset$$

Jako że m jest dowolne różne od l oznacza to że tylko przedział $(l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})$ przecina $f^{-1}(U)$, czyli

$$f^{-1}(U) \subset (l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni}).$$

□

Lemat 5.6 *Niech i, K i U będą jak w Lemacie 5.5. Wtedy $M_n(K) = M_n(U) = 10^{-ni}$.*

Dowód: Na mocy zawierania z Lematu 5.5 mamy

$$M_n(U) \leq M_1((l10^{-ni}, (l+1)10^{-ni})) = 10^{-ni} \leq M_n(K).$$

Niech $m > 0$ będzie liczbą naturalną. Podzielmy teraz kostkę K na 10^{nm} kostek domkniętych o boku 10^{-m-i}. Co najwyżej $2n10^{(n-1)m}$ z tych kostek przecina brzeg K. A więc co najmniej $10^{nm} - 2n10^{(n-1)m}$ jest zawartych w U. Oznacza to że przeciobraz U zawiera co najmniej $10^{nm} - 2n10^{(n-1)m}$ odcinków rozłącznych długości $10^{-n(m+i)}$. Dodając długości tych odcinków mamy

$$M_n(U) \geq 10^{-n(m+i)}(10^{nm} - 2n10^{(n-1)m}) = 10^{-ni}(1 - 2n10^{-m}).$$

Jako że m jest dowolne to

$$M_n(U) \geq \lim_{m\to\infty} 10^{-ni}(1 - 2n10^{-m}) = 10^{-ni}$$

co oznacza że $M_n(U) = 10^{-ni}$. Teraz niech $m = 1$ i F będzie kostką domkniętą z podziału wyżej zawartą w U. Jako że miara $M_n(U)$ jest równa sumie miar kostek otwartych zawartych w U, to miara brzegu F to 0, czyli miara F jest równa mierze wnętrza F. Lecz przeciwobraz dowolnej kostki H podobnej do F jest przesunięciem przeciwobrazu F, czyli miara H jest równa mierze F. Podobnie miara wnętrza H jest równa mierze wnętrza F, czyli równa mierze F. W więc miara brzegu H jest równa 0. Ponieważ brzeg K jest zawarty w sumie brzegów kostek z podziału, to miara brzegu K to zero, czyli $M_n(K) = M_n(U)$. $\square$

Lemat 5.7 *Jeśli μ jest miarą na $\mathbb{R}$ taką że dla każdego przedziału postaci $I = (k10^{-i}, (k+1)10^{-i})$ lub $I = [k10^i, (k+1)10^{-1}]$ z całkowitymi k i i i z $i > 0$ mamy $\mu(I) = 10^{-i}$, to dla borelowskich A mamy $\mu(A) = M_1(A)$.*

Dowód. Ustalmy całkowite $i > 0$. Niech $I = (k10^i, l10^i)$ z całkowitymi k i l.

$$I = (k10^{-i}, (k+1)10^{-i}) \cup \bigcup_{j=k+1}^{l-1} [j10^{-i}(j+1)10^{-i})$$

Z założenia

$$10^{-i} = \mu((j10^{-i}(j{+}1)10^{-i}) \leq \mu([j10^{-i}(j{+}1)10^{-i})) \leq \mu([j10^{-i}(j{+}1)10^{-i}]) = 10^{-1}$$

czyli $\mu([j10^{-i}(j+1)10^{-i})) = 10^{-i}$. A więc

$$\mu(I) = \mu((k10^{-i}, (k+1)10^{-i})) + \sum_{j=k+1}^{l-1} \mu([j10^{-i}(j+1)10^{-i})) = (l-k)10^{-i}$$

czyli $\mu(I) = M_1(I)$. Jeśli $J = (a, b)$ jest dowolnym przedziałem otwartym to można znaleźć ciąg I_m przedziałów jak wyżej (z dążącym do ∞) takie że $I_m \subset I_{m+1}$ i $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m = I$. Teraz

$$\mu(I) = \sup_m \mu(I_m) = \sup_m M_1(I_m) = M_1(I)$$

czyli równość $\mu(I) = M_1(I)$ zachodzi dla dowolnego przedziału otwartego I. Użycie Lematu 3.8 kończy dowód. $\square$

Lemat 5.8 *Jeśli A_l dla $l = 1, \ldots, n$ są zbiorami M_1 mierzalnymi miary skończonej to $B = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ jest M_n-mierzalny i*

$$M_n(B) = \prod_{l=1}^{n} M_1(A_l).$$

Dowód: Najpierw rozpatrzymy przypadek gdy $M_1(A_l) > 0$ dla $l = 1, \ldots, n$ i A_l są borelowskie. Niech m będzie liczbą całkowitą taką że $1 \le m \le n$. Indukcyjnie względem m pokażemy że wynik zachodzi jeśli dodatkowo, dla $l = m, \ldots, n$ zbiory A_l są przedziałami postaci $(k10^{-i}, (k+1)10^{-i})$ lub $[k10^{-i}, (k+1)10^{-i}]$. Dla $m = 1$ wszystkie A_l są takimi przedziałami i wynik wynika z Lematu 5.6. Aby zrobić krok indukcyjny załóżmy że wynik zachodzi dla mniejszych wartości m i ustalmy A_l dla $l \neq m$. Niech

$$c = \prod_{l=1, l\neq m}^{n} M_1(A_l)$$

Wtedy z założenia indukcyjego

$$M_n(B) = M_1(A_m)c$$

dla A_m będącego przedziałem jak wyżej. Chcemy pokazać że ta równość zachodzi dla dowolnego M_1-mierzalnego A_m. Lecz funkcja $\mu(A_m) = c^{-1}M_n(B)$ jest miarą określoną na podzbiorach borelowskich prostej spełniającą założenia Lematu 5.7. Dodatkowo, jeśli $M_n(B) = 0$ to dowolny podziór B jest M_n mierzalny, więc również jeśli $\mu(A_m) = 0$ to dowolny podzbór A_m jest μ-mierzalny. Oznacza to że dla dowolnego M_1-mierzalnego A_m mamy

$$M_1(A_m) = \mu(A_m) = c^{-1}M_n(B)$$

czyli

$$M_n(B) = M_1(A_m)c = \prod_{l=1}^{n} M_1(A_l)$$

czyli dostaliśmy pomocniczy wynik dla m. A więc na mocy zasady indukcji mamy równość dla $m = n$, czyli wszyskie A_l mogą być dowolnymi zbiorami M_1-mierzalnymi dodatniej miary. Jeśli któryś z A_l ma miarę 0 to przedstawiamy go jako przekrój zbiorów dodatniej skończonej miary i otrzymujemy wynik stosując Lemat 2.11. □

Lemat 5.9 *Jeśli μ jest miarą taką że dla dowolnej kostki K postaci $K = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ mamy $\mu(K) = M_n(K)$ to na zbiorach borelowskich μ jest równa M_n. Jeśli ponadto dowolny podzbiór zbioru μ miary 0 jest mierzalny to μ jest równa M_n dla zbiorów M_n mierzalnych.*

Dowód. Pierwsza część wynika z Lematu 3.7. Mianowicie, rodzina kostek jest zamknięta na iloczyny, każda kostka ma miarę skończoną i $\mathbb{R}^n$ jest przeliczalną sumą kostek. Dowód drugiej części jest podobny do drugiej części Lematu 3.8 □

Lemat 5.10 *Jeśli S jest macierzą n-wymiarową to dla zbiorów mierzalnych A w $\mathbb{R}^n$ mamy*

$$M_n(SA) = |\det(S)| M_n(A).$$

Podobnie $M_n(A + x) = M_n(A)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Druga część wynika z Lematu 5.9, bo obie strony są miarami takimi że miara kostki to jej objętość. Zauważmy że jeśli pierwsza część lematu zachodzi dla macierzy S_1 i S_2 to zachodzi też dla produktu S_1S_2. A więc wystarczy pokazać że dowolna macierz jest produktem macierzy dla których zachodzi wynik. Jeśli macierz S jest diagonalna i ma niezerowe elementy na diagonali to

$$\mu(A) = |\det(S)|^{-1}M_n(SA)$$

jest miarą taką że miara kostki to jej objętość, a więc równa się M_n, co daje wynik dla takich macierzy. Jeśli S ma zero na diagonali, to obraz S ma miarę zero, $\det(S) = 0$, więc wynik zachodzi bo obie strony równości są zerami. Jeśli S_c jest macierzą dwuwymiarową postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

to dla $c > 0$ obraz prostokąta $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ to równoległobok o podstawie długości $(b_1 - a_1)$ i wysokości $b_2 - b_1$. Jeśli $c(b_2 - b_1) < (b_1 - a_1)$ to równoległobok można przedstawić jako sumę trapezu i trójkąta. Przesuwajac trójkąt otrzymamy jako sumę prostokąt. A więc miara równoległoboku jest równa mierze oryginalnego prostokąta. Jeśli wysokość równoległoboku jest zbyt duża by ten argument zastowować bezpośrednio, to można go pociąc na paski, tzn. przedtawić jako sumę równoległoboków o małej wysokości i zastosować argument do każdego paska z osobna. Podobnie gdy $c < 0$. Oznacza to że do miary $\mu(A) = M_2(S_cA)$ można zastosować Lemat 5.9 co daje wynik dla tej macierzy. Jeśli macierz S ma jedynki na diagonali i tylko jeden niezerowy element poza diagonalą to rozumowanie jest takie same jak dla macierzy S_c (tylko dwie współrzędne odgrywają rolę, na pozostałych macierz działa jak identyczność). Dowolną macierz górnotrójkątną U można przedstawić jako produkt macierzy diagonalnej i macierzy mających jedynki na diagonali i tylko jeden niezerowy element ponad diagonalą, a więc dostajemy wynik dla macierzy górnotrójkątnych. Podobnie dostaniemy wynik dla macierzy dolnotrójkątnych L z jedynkami na diagonali. Dla macierzy permutacyjnych P, tzn. takich które tylko zamieniają miejscami współrzędne wynik jest jasny, bo $|\det(P)| = 1$ i P zachowuje objętość kostek. Używając eliminację Gaussa dowolną macierz nieosobliwą S można zapisać jako

$$S = LUP$$

gdzie L jest dolnotrójkątna z jedynkami na diagonali, U jest górnotrójkątna, zaś P jest macierzą permutacyjną. A więc wynik zachodzi dla macierzy nieosobliwych. Jeśli S jest osobliwa, to obraz S jest podprzestrzenią mniejszego wymiaru, więc ma miarę 0, $|\det(S)| = 0$ i wynik zachodzi. □

6 Całka Lebesge'a

6.1 Całka z funkcji nieujemnych

Niech X będzie przestrzenią z miarą μ. Na początku będziemy całkować funkcje nieujemne, a więc będziemy zajmować się funkcjami mierzalnymi $f : X \mapsto$

$[0,\infty]$, tzn. dopuszczamy funkcje przyjmujące wartość ∞ i przyjmiemy konwencję że $0\infty = 0$.

Definicja: Funkcję mierzalną $f : X \mapsto [0,\infty)$ nazywamy funkcją prostą jeśli przyjmuje tylko skończenie wiele wartości.

Lemat 6.1 *Suma, iloczyn i maksimum dwu funkcji prostych jest funkcją prostą. Jeśli różnica dwu funkcji prostych jest nieujemna to jest funkcją prostą. Ogólniej, dowolna operacja dwuargumntowa od funkcji prostych da funkcję prostą o ile wynik jest nieujemny. Iloczyn funkcji prostej przez dodatnią stałą jest funkcją prostą.*

Dowód. Jeśli f_1 przybiera k wartości zaś f_2 przybiera l wartości to dowolna operacja dwuargumentowa zastosowana do f_1 i f_2 da co najwyżej kl wartości. Podobnie iloczyn f_1 i stałej przybiera co najwyżej k wartości. □

Lemat 6.2 *Niech $f : X \mapsto [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną. Istnieje ciąg funkcji prostych f_n takich że $f_n \le f_{n+1}$ i dla każdego $x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dowód: Niech $A_{n,k} = \{x : \frac{k}{n} < f(x) \le \frac{k+1}{n}\}$, $B_n = \{x : f(x) > n\}$ i

$$h_n(x) = n1_{B_n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2-1} k1_{A_{n,k}}.$$

Zapis pokazuje że h_n jest funkcją prostą. Łatwo zauważyć że $h_n(x) \le f(x)$. Ponadto $h_n(x) \to f(x)$. Mianowicie, jeśli $f(x) = \infty$ to $h_n(x) = n \to \infty$. Jeśli $n > f(x)$ to $h_n(x) \le f(x) \le h_n(x) + \frac{1}{n}$, czyli $|f(x) - h_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$, a więc rzeczywiście

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x).$$

Teraz bierzemy $f_n(x) = \max(h_1(x), \ldots, h_n(x))$. □

Lemat 6.3 *Jeśli f jest funkcją prostą to istnieje liczba naturalna n, liczby rzeczywiste $c_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$ i zbiory niepuste rozłączne A_i, $i = 1,\ldots,n$ takie że $c_i < c_{i+1}$ i*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}.$$

Liczba n, c_i i A_i są jednoznacznie wyznaczone przez f.

Dowód: Niech S będzie zbiorem niezerowych wartości przyjmowanych przez f. Po uporządkowaniu $S = \{c_i\}$ gdzie $c_i < c_{i+1}$. Niech $A_i = \{x : f(x) = c_i\} = f^{-1}(\{c_i\})$. Z definicji A_i są rozłączne. Dla dowolnego x wartość $f(x)$ to albo 0, albo jedno z c_i. Jeśli $f(x)$ to 0 to x nie należy do żadnego A_i, wiec suma wyżej wynosi 0 i zachodzi równość. Jeśli $f(x) = c_i$, to $x \in A_i$ i $x \notin A_j$ dla $j \ne i$, więc suma ma tylko jeden niezerowy składnik i wartość wynosi c_i czyli też mamy równość. Pozostaje pokazać jednoznaczność. Jako że A_i są niepuste i rozłączne to c_i pojawią się jako wartości f i będą to wszystkie niezerowe wartości f. A więc zbiór $\{c_i\}$ jest wyznaczony jednoznacznie. Ponieważ c_i są uporządkowane to ciąg c_i jest też wyznaczony jednoznacznie. Wreszcie rozłączność A_i implikuje że $A_i = \{x : f(x) = c_i\}$. □

Definicja: Jeśli $B \subset X$ jest mierzalny, f jest funkcją prostą to całkę z f po B definiujemy jako:

$$\int_B f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(B \cap A_i)$$

gdzie A_i i c_i są jak w Lemacie 6.3.

Komentarz: Tą notację stosujemy gdy jest jasne względem jakiej zmiennej chcemy całkować. Jeśli chcemy wyraźnie zaznaczyć zmienną względem której całkujemy to zamiast $\int f$ piszemy

$$\int f(x) d\mu(x)$$

lub

$$\int f(x) dx$$

jeśli całkowanie jest względem miary Lebesgue'a.

Lemat 6.4 *Jeśli f i g są funkcjami prostymi zaś E_i, $i = 1, \ldots, n$ są rozłącznymi zbiorami mierzalnymi, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ to*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_i} f = \int_E f$$

i

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

Dowód: Niech $f = \sum_{j=1}^k a_j 1_{A_j}$ będzie zapisem f z Lematu 6.3. Wtedy

$$\int_{E_i} f = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(E_i \cap A_j)$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(E_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(E \cap A_j) = \int_E f$$

co daje pierwszą równość. Aby pokazać drugą niech $g = \sum_{i=1}^l b_i 1_{B_i}$ będzie zapisem g z Lematu 6.3 i niech $E_{i,j} = E \cap A_j \cap B_i$. Dla $x \in E_{i,j}$ suma $f(x) + g(x)$ jest stała i przymuje wartość $a_j + b_i$. A więc jak zapiszemy $f + g$ zgodnie z

Lematem 6.3 i użyjemy definicję całki, to tylko jeden składnik w całce będzie niezerowy i

$$\int_{E_{i,j}} (f+g) = (a_j + b_i)\mu(E_{i,j}) = \int_{E_{i,j}} f + \int_{E_{i,j}} g.$$

Lecz $E_{i,j}$ są rozłączne i $\bigcup_{i,j} E_{i,j} = E$, więc na mocy pierwszej części

$$\int_E (f+g) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\left(\int_{E_{i,j}} f + \int_{E_{i,j}} g\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\int_{E_{i,j}} f + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\int_{E_{i,j}} g = \int_E f + \int_E g.$$

□

Lemat 6.5 *Jeśli $E \subset X$ jest mierzalny, f i g są funkcjami prostymi i $f(x) \leq g(x)$ dla każdego x to $\int_E f \leq \int_E g$.*

Dowód: Niech $h = g - f$. Wtedy $h \geq 0$, $\int_E h \geq 0$ i

$$\int_E g = \int_E f + \int_E h \geq \int_E f$$

□

Definicja: Jeśli $E \subset X$ jest mierzalny i $f : X \mapsto [0, \infty]$ jest mierzalna to całkę z f po E definiujemy jako

$$\int_E f = \sup_h \int_E h$$

gdzie supremum przebiega funkcje proste h takie że $0 \leq h \leq f$. Jeśli f jest funkcją prostą to na mocy Lematu 6.5 supremum jest osiągnięte dla $f = h$, a więc ta definicja zgadza się z poprzednią.

Lemat 6.6

$$\int_E f = \int f 1_E.$$

Całka po E zależy tylko od wartości f na E.

Dowód: Dla funkcji prostych równość wynika wprost z definicji. Jeśli f jest mierzalna zaś $h \leq f$ i h jest funkcją prostą to $h1_E \leq f1_E$ i $h1_E$ też jest funkcją prostą. Więc

$$\int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h = \sup_{h \leq f} \int h1_E \leq \sup_{g \leq f1_E} \int h = \int f1_E.$$

Jeśli $h \leq f1_E$ i h jest funkcją prostą to $h = h1_E$ i $h \leq f$, czyli

$$\int f1_E = \sup_{h \leq f1_E} \int h = \sup_{h \leq f1_E} \int_E h \leq \sup_{h \leq f} \int_E h = \int_E f$$

co łącznie daje równość. Druga część jest wnioskiem z pierwszej. $\square$

Uwaga: Powyższy lemat oznacza że w rozumowanich teoretycznych zwykle można się ograniczyć do całki po całym X.

Oznaczenie: Jeśli $E = X$ to zamiast $\int_X f$ będziemy pisać $\int f$

Lemat 6.7 *Niech $f : X \mapsto [0, \infty]$ będzie funkcją mierzalną. Jeśli $N = \{f(x) \neq 0\}$ jest miary 0 to $\int f = 0$. Przeciwnie, jeśli $\int f = 0$ to istnieje zbiór mierzalny N miary 0 taki że $f(x) = 0$ dla $x \notin N$.*

Dowód: Jesli h jest funkcją prostą taką że $h \leq f$ i $h = \sum c_i 1_{A_i}$ jest zapisem h ze Lematu 6.3, to $x \in A_i$ oznacza że $f(x) \neq 0$, a więc $A_i \subset N$, czyli $\mu(A_i) = 0$. Dalej

$$\int h = \sum c_i \mu(A_i) = 0$$

czyli

$$\int f = \sup \int h = 0.$$

Jeśli $\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) > 0\}$ ma miarę dodatnią, to mamy

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x : f(x) > \frac{1}{i}\}$$

a więc na mocy Lematu 2.11 istnieje i takie że

$$A = \{x : f(x) > \frac{1}{i}\}$$

ma miarę dodatnią. Niech $h = \frac{1}{i} 1_A$. Wtedy $h \leq f$ i

$$\int h = \frac{1}{i} \mu(A) > 0$$

czyli $\int f > 0$. $\square$

Na mocy Lematu 6.7 przy obliczaniu całek możemy pomijać zachowanie f na zbiorach miary 0. W szczególności całka może być skończona nawet jeśli $f(x) = \infty$ dla niektórych x, o ile zbiór takich x jest miary 0.

Lemat 6.8 *Jesli $f \leq g$ to $\int f \leq \int g$.*

Dowód: Wynika to bezpośrednio z definicji, bo supremum w defincji całki z f jest brane po mniejszym zbiorze niż supremum w definicji całki z g. $\square$

Lemat 6.9 *(Twierdzenie o zbieżności monotonicznej) Jesli $f_n : X \mapsto [0, \infty]$ są mierzalne, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ dla dowolnego x i dla każdego x mamy $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ to*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Dowód. Zauważmy że skoro f_n tworzą ciąg niemalejący i f jest granicą f_n to $f_n(x) \leq f(x)$ dla dowolnego x. Oznacza to że $\int f_n \leq \int f$. Ponadto $\int f_n$ jest ciągiem niemalejącym, więc granica całek istnieje i

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Niech $h \leq f$ będzie funkcją prostą. Z Lematu 6.3 $h = \sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie mniejsze of c_1 i niech $B_{i,n} = \{x \in A_i : f_n(x) > c_i - \varepsilon\}$. Dla $x \in A_i$ mamy $f(x) \geq h(x) = c_i$. Jako że $f_n(x) \to f(x)$ to istnieje n takie że $f_n(x) > c_i - \varepsilon$. czyli $x \in B_{i,n}$. A więc $A_i = \bigcup_n B_{i,n}$. Niech $h_n = \sum_{i=1}^k (c_i - \varepsilon) 1_{B_{i,n}}$. Wtedy h_n jest funkcją prostą i $h_n \leq f_n$. Zauważmy że $B_{i,n} \subset B_{i,n+1}$, a więc na mocy Lematu 2.11 mamy

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{i,n+1})$$

więc

$$\int h_n \to \sum_{i=1}^k (c_i - \varepsilon)\mu(A_i).$$

Niech $t = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$. Jeśli $t < \infty$ to powyższa równośc oznacza że

$$\int h_n \to -\varepsilon t + \int h$$

czyli jako że $f_n \geq h_n$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq -\varepsilon t + \int h.$$

Jako że $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe to

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int h.$$

Jeśli $t = \infty$ to

$$\int h_n \to \infty$$

i również

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int h.$$

Jako że $h \leq f$ jest dowolną funkcją prostą to powyższa nierówność oznacza że

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int f.$$

co razem z otrzymaną na początku nierównością przeciwną daje równość. $\square$

Lemat 6.10 *Jeśli $f, g : X \mapsto [0, \infty]$ są mierzalne to*

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

Dowód: Niech f_n będzie ciągiem funkcji prostych monotonicznie zbieżnym do f, zaś g_n będzie ciągiem funkcji prostych monotonicznie zbieżnym do g. Wtedy $f_n + g_n$ jest ciągiem funkcji prostych monotonicznie zbieżnym do $f+g$ i

$$\int (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n + \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int f + \int g$$

Gdzie druga równość wynika z Lematu 6.4 a pozostałe z Lematu 6.9. □

Lemat 6.11 *(Twierdzenie Fubiniego) Niech $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$. Niech $f(x,y) : X \mapsto [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną i niech N będzie zbiorem takich x że funkcja $f(x,y)$ jest mierzalna jako funkcja zmiennej y. Wtedy $\mathbb{R}^n - N$ jest zbiorem miary 0, funkcja $\phi(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^k} f(x,y)$ jest mierzalna na N i*

$$\int_X f = \int_N \phi(x).$$

Dowód: Najpierw rozważmy f postaci 1_A gdzie A jest zbiorem borelowskim. Zauważmy że przy ustalonym x funkcja $1_A(x,y)$ jest borelowsko mierzalna jako funkcja y (można ją potraktować jako superpozycję włożenia $y \mapsto (x,y)$ które jest ciągłe z $1_A(x,y)$). Jeśli funkcja $\phi(x)$ jest mierzalna to piszemy

$$\nu(A) = \int_N \phi(x).$$

Pokażemy że ν jest miarą. Aby zaznaczyć zależność ϕ od A będziemy pisać $\phi_A(x)$. Zauważmy najpierw że jeśli $A = B \times C$ dla B borelowskiego w $\mathbb{R}^n$ miary skończonej i C borelowskiego w $\mathbb{R}^k$ miary skończonej to dla każdego ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $1_A(x,y)$ jest albo równa 1_C albo równa 0. Ponadto $\phi_A(x) = M_k(C)1_B(x)$, a więc ϕ_A jest mierzalna. A więc dla A tej postaci $\nu(A)$ jest zdefiniowane i $\nu(A) = M_n(B)M_k(C) = M_{n+k}(A)$. Niech T będzie rodziną A jak wyżej (czyli produktów kartezjańskich zbiorów borelowskich miary skończonej).

Jeśli A jest podzbiorem X takim że $\nu(A) < \infty$ i $B \subset A$ i $\nu(B)$ jest określone to $1_{A-B} = 1_A - 1_B$ i

$$\phi_{A-B}(x) = \phi_A(x) - \phi(B)(x)$$

czyli ϕ_{A-B} jest mierzalna, więc $\nu(A-B)$ jest określone (i $\nu(A-B) = \nu(A) - \nu(B)$).

Ustalmy $D \in T$. Niech A_i będzie ciągiem zbiorów takim że $\nu(A_i)$ jest określone, $A_i \subset A_{i+1}$ i $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dla każdego ustalongo x mamy $1_{A_i}(x,y) \to 1_A(x,y)$, więc na mocy Lematu 6.9 mamy $\phi_{A_i}(x) \to \phi_A(x)$, a więc ϕ_A jest mierzalna, czyli $\nu(A)$ jest określona i $\nu(A_i) \to \nu(A)$. Stosując Lemat 3.6 z $\mathcal{L}$ będącym rodziną podzbiorów $A \subset D$ takich że $\nu(A)$ jest określone i $S = \{A \cap F : A \in T\}$ widzimy że założenia są spełnione więc $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą. Na mocy Lematu 3.7 widzimy że $\nu(A) = M_{n+k}(A)$ dla $A \in \mathcal{L}$. Jako że T zawiera bazę zbiorów otwarych w X, to $\mathcal{L}$ zawiera wszystkie podzbiory borelowskie D. A więc ν jest określone dla dowolnego ograniczonego zbioru borelowskiego A i $\nu(A) = M_{n+k}(A)$. Dowolny zbiór borelowski jest sumą wstępującego ciągu zbiorów borelowskich ograniczonych więc ν jest określone dla dowolnego zbioru borelowskiego A i ma mocy Lematu 2.11 dalej mamy $\nu(A) = M_{n+k}(A)$.

Niech A będzie dowolny zbiorem mierzalnym. Wtedy na mocy Lematu 5.4 istnieją zbiory borelowskie F i G taki że $F \subset A \subset G$ i $M_{n+k}(G-F) = 0$. Niech $Z = A - F$. To co pokazaliśmy wyżej oznacza że $\nu(G - F) = 0$, czyli

$$\int \phi_{G-F}(x) = 0$$

a więc na mocy Lematu 6.7 istnieje zbiór N taki że $M_n(\mathbb{R}^n - N) = 0$ i $\phi_{G-F}(x) = 0$ dla $x \in N$. Jeszcze raz używając Lemat 6.7 widzimy że dla ustalonego $x \in N$ funkcja $1_{G-F}(x, y)$ jest różna od 0 tylko dla y ze zbioru miary zero. Lecz $1_Z \leq 1_{G-F}$, czyli $1_Z(x, y)$ jest różna od 0 dla y z podzbioru zbioru miary 0, a więc $1_Z(x, y)$ jest mierzalna, bo dowolny podzbiór zbioru miary 0 jest M_k mierzalny. Ponadto $\phi_Z(x) = 0$ dla $x \in N$, czyli ϕ_Z jest mierzalna. Jako że $1_A = 1_F + 1_Z$ to $1_A(x, y)$ jest mierzalne dla $x \in N$ i $\phi_A = \phi_F + \phi_Z$ jest mierzalne na N. Ponado

$$\int 1_A = M_{n+k}(A) = M_{n+k}(F) = \int_N \phi_F = \int_N (\phi_F + \phi_Z) = \int_N \phi_A$$

czyli lemat zachodzi dla f postaci 1_A. Jeśli f jest funkcją prostą to $f = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$ i stosując już udowodnioną część widzimy że istnieją zbiory N_i takie że $1_{A_i}(x, y)$ jest mierzalne względem y dla $y \in N$ i $M_n(\mathbb{R}^n - N_i) = 0$. Niech $N = \bigcup_{i=1}^m N_i$. Wtedy

$$M_n(\mathbb{R}^n - N) \leq \sum_{i=1}^m M_n(\mathbb{R}^n - N_i) = 0$$

i dla $x \in N$ widzimy że $f(x, y) = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}(x, y)$ jako suma funkcji mierzalnych jest mierzalna. Następnie

$$\phi_f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_{A_i}(x)$$

więc

$$\int_N \phi_f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \int_N \phi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^m c_i M_{n+k}(A_i) = \int_X f.$$

A więc Lemat zachodzi gdy f jest funkcją prostą. Wreszcie niech f będzie mierzalna. Wtedy istnieje ciąg funkcji prostych f_i monotonicznie zbieżny do f. Z już dowiedzionej części dla każdego i istnieje zbiór mierzalny N_i taki że dla $x \in N_i$ funkcja $f_i(x, y)$ jest mierzalna jako funkcja y. Niech $N = \bigcup_{i=1}^\infty N_i$. Mamy

$$M_n(\mathbb{R}^n - N) \leq \sum_{i=1}^\infty M_n(\mathbb{R}^n - N_i) = 0$$

Dla $x \in N$ funkcja $f(x,y)$ jest mierzalna jako funkcja y bo jest monotoniczną granicą funkcji mierzalnych. Następnie, na mocy Lematu 6.9 przy ustalony x mamy $\phi_{f_i}(x) \to \phi_f(x)$ i zbieżność jest monotoniczna więc jeszcze raz używając Lemat 6.9 mamy

$$\int_N \phi_f(x) = \lim_{i\to\infty} \int_N \phi_{f_i} = \lim_{i\to\infty} \int_X f_i = \int_X f$$

co daje wynik dla f. □

Lemat 6.12 *Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną i niech $A \subset \mathbb{R}^{n+1} = \{(x,y) : 0 \le y \le f(x)\}$ będzie zbiorem punktów leżących pod wykresem f. Wtedy*

$$M_{n+1}(A) = \int f.$$

Dowód. Stosujemy Lemat 6.11 do funkcji $g(x,y) = 1_A$. Dla ustalonego x mamy $g(x,y) = 1_{[0,f(x)]}(y)$ czyli

$$\phi(x) = \int g(x,y)dy = \int 1_{[0,f(x)]}(y)dy = f(x)$$

i

$$M_{n+1}(A) = \int 1_A = \int \phi(x) = \int f(x).$$

□

6.2 Całka z funkcji dowolnego znaku

Teraz rozważmy dowolną funkcję mierzalną $f : X \mapsto [-\infty,\infty]$. Niech $f_+(x) = \max(f(x),0)$ i $f_-(x) = \min(f(x),0)$. Mamy $f(x) = f_=(x) + f_-(x)$. Powiemy że f ma całkę jeśli co najmniej jedna z $\int f_+$ i $\int -f_-$ jest skończona. Zarówna f_+ jak i $-f_-$ są nieujemne, więc dla nich całka jest zdefiniowana. Jeśli f ma całkę to piszemy

$$\int f = \int f_+ - \int -f_-.$$

Powiemy że f jest całkowalna jeśli $\int f_+$ i $\int -f_-$ obie są skończone.

Lemat 6.13 *Funkcja mierzalna $f : X \mapsto [-\infty,\infty]$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\int |f| < \infty$.*

Dowód: $\int |f| = \int f_+ + \int -f_-$. □

Lemat 6.14 *Jeśli f i g są całkowalne, zaś $a,b \in \mathbb{R}$ to $af+bg$ jest całkowalna. Jeśli o f zakładamy tylko że ma całkę to $af+bg$ ma całkę. Ponato*

$$\int (af+bg) = a\int f + b\int g.$$

Dowód: Bez utraty ogólności możemy przyjąc że $a, b > 0$. Dalej, $|af + bg| \leq a|f| + b|g|$, więc

$$\int |af + bg| \leq a \int |f| + b \int |g| < \infty$$

czyli $af + bg$ jest całkowalna. Niech $h = af + bg$. Mamy $h_+ \leq af_+ + bg_+$, czyli $s = af_+ + bg_+ - h_+ \geq 0$. Podobnie $af_- + bg_- \leq h_-$, czyli $t = h_- - af_- - bg_- \geq 0$. Na mocy Lematu 6.10 mamy

$$a \int f_+ + b \int g_+ = \int af_+ + bg_+ = \int h_+ + \int s,$$

$$a \int -f_- + b \int -g_- = \int -(af_- + bg_-) = \int -h_- + \int t.$$

Mamy też

$$h = af + bg = af_+ + af_- + bg_+ + bg_- = (af_+ + bg_+) + (af_- + bg_-) =$$

$$= (h_+ + s) + (h_- - t) = (h_+ + h_-) + (s - t).$$

Jako że $h = h_+ + h_-$ oznacza to że $s - t = 0$, czyli $\int s = \int t$. Teraz

$$\int h = \int h_+ - \int -h_- =$$

$$= (a \int f_+ + b \int g_+ - \int s) - (a \int -f_- + b \int -g_- - \int t) =$$

$$= a(\int f_+ - \int -f_-) + b(\int g_+ - \int -g_-) = a \int f + b \int g.$$

Argument w przypadku gdy o f zakładamy tylko że ma całkę jest podobny. □

Lemat 6.15 *(Fatou) Jeśli f_n są funkcjami mierzalnymi i instnieje funkcja całkowalna h taka że $f_n \geq h$, to*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

przy czym całki wyżej istnieją.

Dowód: Zauważny że $f_n - h \geq 0$. A więc zastępując f_n przez $f_n - h$ możemy zakładać że $f_n \geq 0$. Daje to natychmiast tezę o istnieniu całek. Następnie biorąc $g_j = \inf_{n \geq j} f_n$ mamy

$$\int g_j \leq \inf_{n \geq j} \int f_n.$$

i

$$\liminf f_n = \sup_j g_j.$$

Na mocy Lematu 6.9 mamy

$$\int \liminf f_n = \sup_j \int g_j \leq \sup_j \inf_{n \geq j} \int f_n = \liminf \int f_n.$$

□

Lemat 6.16 *(Twierdzenie o zbieżności ograniczonej) Jeśli f_n jest ciągiem funkcji całkowalnych zbieżnym w każdym punkcie za wyjątkiem być może zbioru miary* 0 *i takim że istnieje funkcja całkowalna h że $|f_h| \leq h$, to*

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n.$$

Dowód. Usuwając z X podzbiór miary 0 nie zmienię całek, więc mogę zakładać że f_n zbiegają w każdym punkcie. Stosując Lemat 6.15 do f otrzymuję

$$\int \lim \int f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Dla $-f$ Lemat 6.15 daje

$$\int \lim \int f_n \geq \limsup \int f_n.$$

A więc

$$\limsup \int f_n \leq \liminf \int f_n$$

co oznacza że mamy równość i istnieje granica całek. Ponadto oznacza to że w obu nierównościach wyżej mamy równość. □

Lemat 6.17 *(Twierdzenie Fubiniego) Niech $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$. Niech $f(x,y) : X \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną i niech N będzie zbiorem takich x że funkcja $f(x,y)$ jest mierzalna jako funkcja zmiennej y. Wtedy $\mathbb{R}^n - N$ jest zbiorem miary* 0*, funkcja $\phi(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^k} f(x,y)$ jest mierzalna na N i*

$$\int_X f = \int_N \int f(x,y)dydx.$$

Dowód: Jest to bezpośredni wniosek z Lematu 6.11.

6.3 Całka na przestrzeni euklidesowej

Lemat 6.18 *Jeśli f jest mierzalna w pewnym otoczeniu x i $\limsup_{y \to x_+} f(y) = a$ to $\limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_{(x,x+h]} f \leq a$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji granicy górnej istnieje $\delta > 0$ takie że $f(y) \leq a + \varepsilon$ dla $y \in (x, x+\delta)$. Ponieważ f jest ograniczona z góry na przedziale $(x, x+\delta)$, to całka istnieje i dla $h \leq \delta$ mamy

$$\int_{(x,x+h]} f \leq h(a+\varepsilon).$$

to oznacza że

$$\limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_{(x,x+h]} f \leq a + \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolne daje to wynik. □

Lemat 6.19 *Jeśli f jest funkcją ciągłą, F jest funkcją pierwotną dla f na przedziale $[a, b]$ to*

$$\int_{(a,b])} f = F(b) - F(a).$$

Dowód. Stosując dwa razy (do f i $-f$) Lemat 6.18 widzimy że dla $x \in (a, b)$ mamy

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_{(x,x+h]} f = f(x).$$

Niech $\phi(x) = \int_{(a,x]} f$. Wtedy

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_{(x,x+h]} f = f(x).$$

Podobnie wyliczamy granicę ilorazów różnicowych z $h < 0$ co pokazuje że $\phi'(x) = f(x)$. Oznacza to że ϕ jest funkcją pierwotną dla f, czyli

$$\int_{(a,b])} f = \phi(b) - \phi(a) = F(b) - F(a).$$

□

6.4 Całki z funkcji zespolonych

Jeśli $f : X \mapsto \mathbb{C}$ jest funkcją mierzalną, to $f = g + ih$ gdzie $g, h : X \mapsto \mathbb{R}$ są częścią rzeczywistą i urojoną f. g i h są mierzalne. Powiemy że f jest całkowalna jeśli g i h są całkowalne. Wtedy piszemy

$$\int f = \int g + i \int h$$

Lemat 6.20 *Jeśli $c \in \mathbb{C}$ i f jest całkowalna to cf jest całkowlna i*

$$\int cf = c \int f$$

Dowód: Niech $c = a + ib$ z $a, b \in \mathbb{R}$.

$$cf = (a + ib)(g + ih) = (ag - bh) + i(bg + ah).$$

Jeśli f jest całkowalna to g i h są całkowlne, wiec z własności całek rzeczywistych również $ag - bh$ i $bg + ah$ są całkowlne, więc cf jest całkowalna. Dalej

$$\int cf = \int (ag - bh) + i \int (bg + ah) = a \int g - b \int h + ib \int g + ia \int h =$$

$$= (a + ib) \int g + (ia - b) \int h = (a + ib) \int g + (a + ib)i \int h =$$

$$= (a + ib) \left(\int g + i \int h \right) = c \int f.$$

□

Lemat 6.21 *f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\int |f| < \infty.$$

Ponadto

$$|\int f| \leq \int |f|$$

Dowód. Oczywiście $|g| \leq |f|$ i $|h| \leq |f|$, więc $\int |f| < \infty$ implikuje całkowalność g i h. Ponadto

$$|\Re \int f| = |\int g| \leq \int |g| \leq \int |f|.$$

Wybieram α tak by $|\alpha| = 1$ i $|\int f| = \Re(\alpha \int f)$. Wtedy

$$|\int f| = |\Re(\alpha \int f)| = |\Re(\int \alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f|.$$

Następnie, $|f| \leq |g| + |h|$, a więc całkowalność f implikuje $\int |f| < \infty$. $\square$

7 Miary na przestrzeniach topologicznych

Lemat 7.1 *Niech f będzie funkcją rzeczywistą na X, zaś μ^* miarą zewnętrzną na podzbiorach X. Jeśli dla dowolnych s, t, takich że $s < t$ i dla dowolnych $A, B \subset X$ takich że $A \subset \{x : X : f(x) \leq s\}$, $B \subset \{x : X : f(x) \geq t\}$ zachodzi $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ to zbiory $\{x : X : f(x) \leq s\}$ są μ^*-mierzalne.*

Dowód. Niech $E = \{x : X : f(x) \leq s\}$. Musimy pokazać że dla dowolnego $A \subset X$ mamy $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$. Ustalmy A. Podaddytywność miary zewnętrznej daje nierówność $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$ więc musimy pokazać nierówność przeciwną: $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$. Jeśli $\mu^*(A) = \infty$ to ta nierówność jest spełniona, więc w dalszym ciągu możemy zakładać że $\mu^*(A) < \infty$. Niech ciąg t_n będzie malejący i zbieżny do s, np. $t_n = s + 1/n$. Niech $B_0 = A \cap \{x : f(x) \geq t_1\}$, $B_n = A \cap \{x : t_{n+1} \leq f(x) < t_n\}$ dla $n > 0$. Mamy $B_{2n} \subset \{x : f(x) \leq t_{2n}\}$, zaś $\mu^*(\bigcup_{i=0}^{n-1} B_{2i}) \subset \{x : f(x) \geq t_{2n-1}\}$, a więc z założenia

$$\mu^*(\bigcup_{i=0}^{n} B_{2i}) = \mu^*(B_{2n} \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} B_{2i}) = \mu^*(B_{2n}) + \mu^*(\bigcup_{i=0}^{n-1} B_{2i})$$

i indukcyjnie

$$\mu^*(\bigcup_{i=0}^{n} B_{2i}) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(B_{2i}).$$

Jako że $\bigcup_{i=0}^{n} B_{2i} \subset A$ to

$$\sum_{i=0}^{n} \mu^*(B_{2i}) \leq \mu^*(A) < \infty$$

a więc szereg $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_{2i})$ mając wspólnie ograniczone sumy częsciowe jest zbieżny. Podobnie szereg $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_{2n+1})$ jest zbieżny, czyli szereg $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_i)$ jest zbieżny. Niech $\varepsilon > 0$. Wybieramy m tak że $\sum_{n=m}^{\infty} \mu^*(B_i) < \varepsilon$. Niech $C = A \cap \{x : f(x) \geq t_m\}$. Z założenia

$$\mu^*(A \cap E \cup C) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(C).$$

Lecz $A - E \subset C \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} B_i$. A więc

$$\mu^*(A - E) \leq \mu^*(C) + \sum_{i=m}^{\infty} \mu^*(B_i) \leq \mu^*(C) + \varepsilon.$$

Razem

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(C) + \varepsilon = \mu^*(A \cap E \cup C) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Jako że ε był dowolny mamy

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A).$$

□

Nośnik $\mathrm{supp}(f)$ definiujemy jako domknięcie $\{x : f(x) \neq 0\}$. Przez $C_c(X)$ oznaczmy przestrzeń funkcji ciągłych o nośniku zwartym na przestrzeni topologicznej X.

Lemat 7.2 *Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą, $U_i \subset X$, $i = 1, 2$ będą otwarte, $K \subset U_1 \cup U_2$ zwarty. Wtedy istnieją funkcje ciągłe h_1 i h_2 takie że $\mathrm{supp}(h_i) \subset U_i$, $0 \leq h_i(x) \leq 1$ i $h_1(x) + h_2(x) = 1$ dla $x \in K$.*

Dowód: Przyjmiemy za znane że jeśli $x \in X$, U jest otoczeniem x to istnieje funkcja f taka że $0 \leq f(y) \leq 1$, $f(x) = 1$, $\mathrm{supp}(f) \subset U$. Dla każdego $x \in K$ wybieramy otocznie W_x tak by $W_x \subset U_i$ dla pewnego i (wystarczy wybrać U_1 jeśli $x \in U_1$ zaś U_2 w pozostałych przypadkach). Następnie wybieramy f_x tak by $0 \leq f_x(y) \leq 1$, $f_x(x) = 1$, $\mathrm{supp}(f) \subset U_x$ i bierzemy $V_x = \{y : f_x(y) > 0\}$. V_x są pokryciem K, więc można z nich wybrać podpokrycie skończone $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Niech $I = \{i : \mathrm{supp}(f_{x_i}) \subset U_1\}$ i niech $w_1 = \sum_{i \in I} f_{x_i}$, $w_2 = \sum_{i \notin I} f_{x_i}$, $w = w_1 + w_2$.

$$\{y : w(y) > 0\} = \bigcup_i V_{x_i} \supset K$$

a więc $t = \inf_{y \in K} w(y) > 0$. Teraz bierzemy $u = \max(w, t)$, $h_1 = w_1/u$, h_2/u. Na K mamy $u = w = w_1 + w_2$ czyli $h_1(x) + h_2(x) = (w_1(x) + w_2(x))/w(x) = w(x)/w(x) = 1$. Oczywiście $\mathrm{supp}(h_i) = \mathrm{supp}(w_i)$, zaś

$$\mathrm{supp}(w_1) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{supp}(f_{x_i})$$

jako że dla $i \in I$ mamy $\mathrm{supp}(f_{x_i}) \subset U_1$ to $\mathrm{supp}(w_1) \subset U_1$. Podobnie dla w_2. □

Lemat 7.3 *Niech X będzie przestrzenią zwartą a ϕ funkcjonałem liniowym dodatnim na $C(X)$. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara μ na podzbiorach borelowskich X taka że*

$$\phi(f) = \int f d\mu$$

dla $f \in C(X)$ i dla dowolnego borelowskiego $A \subset X$ mamy

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

gdzie K przebiega zwarte podzbiory A.

Dowód: Najpierw zauważmy że jeśli taka miara istnieje to jest jedyna. Mianowicie, jeśli K jest zwarty, U otwarty zaś $f \in C(X)$ taka że $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ dla $x \in K$, $\mathrm{supp}(f) \subset U$ to

$$\mu(K) \leq \int f d\mu \leq \mu(U)$$

Dla dowolnego zwartego $K \subset U$ taka funkcja istnieje na mocy Lematu 7.2. Na mocy warunku

$$\mu(U) = \sup_{K \subset U} \mu(K)$$

mamy więc

$$\mu(U) = \sup_{f} \phi(f)$$

gdzie $f \in C(X)$ przebiega f takie że $0 \leq f \leq 1$ i $\mathrm{supp}(f) \subset U$. Oznacza to że dla zbiorów otwartych miara μ jest zdefiniowana jednoznacznie. Lecz $\mu(X) = \phi(1) < \infty$ i dla zwartych K mamy $\mu(K) = \mu(X - K)$. Jako że $X - K$ jest otwarty μ jest jednoznacznie zdefiniowane dla zbiorów zwartych. A więc na mocy warunku

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

μ jest też jednoznacznie zdefiniowana dla zbiorów borelowskich.

Aby pokazać istnienie μ na podzbiorach X zdefiniujemy miarę zewnętrzną μ^*. Jeśli U jest zbiorem otwartym to wyżej pokazaliśmy że jest tylko jeden sposób zdefiniowania μ, więc używamy ten wzór dla $\mu^*(U)$:

$$\mu^*(U) = \sup_{f} \phi(f)$$

gdzie $f \in C(X)$ jest takie że $0 \leq f(x) \leq 1$ i $\mathrm{supp}(f) \subset U$.

Jeśli A jest dowolnym podzbiorem X to definujemy

$$\mu^*(A) = \inf_{U} \mu^*(U)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte zawierające A.

Oczywiście jeśli $U_1 \subset U_2$ są zbiorami otwartymi to na mocy pierwszego określenia $\mu^*(U_1) \leq \mu^*(U_2)$, a więc drugie określenie daje ten sam wynik co pierwsze, czyli μ^* jest dobrze zdefiniowana i spełnia $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ dla $A_1 \subset A_2$. Zauważmy że $\mu^*(X) = \phi(1) < \infty$, więc dla dowolnego A mamy $\mu^*(A) < \infty$.

Pokażemy że μ^* jest miarą zewnętrzną. Niech U_1 i U_2 będą zbiorami otwartymi a $f \in C(X)$ funkcją taką że $0 \leq f(x) \leq 1$, $\mathrm{supp}(f) \subset U_1 \cup U_2$. Niech $K =$

supp(f). Wybieramy h_1 i h_2 jak w Lemacie 7.2 i bierzemy $f_1 = h_1 f$, $f_2 = h_2 f$. Teraz $0 \leq f_i \leq 1$, supp$f_i \subset U_i$ więc z definicji μ^* mamy $\phi(f_i) \leq \mu^*(U_i)$. A więc

$$\phi(f) = \phi(f_1) + \phi(f_2) \leq \mu^*(U_1) + \mu^*(U_2).$$

Biorąc supremum po f mamy więc

$$\mu^*(U_1 \cup U_2) \leq \mu^*(U_1) + \mu^*(U_2).$$

Inducyjnie, jeśli $U_1, \ldots U_n$ są otwarte to

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i).$$

Niech teraz $U_1, U_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem zbiorów otwartych, $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, zaś $f \in C_c(X)$ jest takie że $0 \leq f \leq 1$, $K = \text{supp}(f) \subset U$. Jako że K jest zwarty zaś U_i tworzą pokrycie K to istnieje n taki że $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. A więc

$$\phi(f) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i).$$

Przechodząc do supremum dostaniemy

$$\mu^*(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i).$$

Dalej, niech $A_i \subset X$ bedą dowolne i niech $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Jeśli $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \infty$ nierówność

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

jest oczywista. W przeciwnym niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego A_i wybieramy U_i takie że $A_i \subset U_i$ i $\mu^*(U_i) \leq \mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Niech $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Na mocy poprzedniej nierówności mamy

$$\mu^*(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

a więc

$$\mu^*(A) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Jako że $\varepsilon > 0$ jest dowolne to

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

czyli μ^* faktycznie jest miarą zewnętrzną.

Pokażemy teraz że jeśli f jest ciągłą funkcją rzeczywistą na X to zbiory postaci $\{x : f(x) \leq s\}$ są mierzalne. Mianowicie, niech $s < t$, $A_1 \subset \{x : f(x) \leq s\}$, $A_2 \subset \{x : f(x) \geq t\}$. Niech $r = (t+s)/2$. Jeśli U jest otwarty taki że $A_1 \cup A_2 \subset U$ to bierzemy $U_1 = U \cap \{x : f(x) < r\}$, $U_2 = U \cap \{x : f(x) > r\}$.

Wtedy U_i są otwarte i $A_i \subset U_i$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne. Mamy $\mu^*(U_i) \geq \mu^*(A_i)$. Z definicji $\mu^*(U_i)$ istnieją $f_i \in C(X)$ takie że $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$ i $\phi(f_i) \geq \mu^*(U_i) - \varepsilon \geq \mu^*(A_i) - \varepsilon$. Niech $f = f_1 + f_2$. Jako że U_i są rozłączne to $\mathrm{supp}(f_i)$ są rozłączne i $0 \leq f \leq 1$. Również $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) \subset U$. Dalej

$$\phi(f) = \phi(f_1) + \phi(f_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 2\varepsilon.$$

A więc $\mu^*(U) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 2\varepsilon$. Jako że ε było dowolne to

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Jako że U jest dowolnym zbiorem otwartym zawierającym $A_1 \cup A_2$ to

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Nierówność przeciwna zachodzi bo μ^* jest miarą zewnętrzną, czyli

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Jako że A_1 był dowolnym podzbiorem $\{x : f(x) \leq s\}$ a A_2 był dowolnym podzbiorem $\{x : f(x) \geq t\}$ to założenia Lematu 7.1 są spełnione i wnioskujemy stąd że faktycznie zbiory postaci $\{x : f(x) \leq t\}$ dla ciągłych f są mierzalne. Jako dopełnienie zbiory otwarte postaci $U_f = \{x : f(x) > 0\}$ są mierzalne dla $f \in C(X)$. Dowolny zbiór otwarty W jest sumą zbiorów postaci U_f. Niech teraz otwarty W będzie sumą (być może nieprzeliczalną) mierzalnych zbiorów otwartych W_α. Niech $f_j \in C_c(X)$ będą takie że $0 \leq f_j \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_j) \subset W$ i

$$\phi(f_j) \geq \mu^*(W) - 2^{-j}$$

Jako że $\mathrm{supp}(f_j)$ jest zwarty to istnieje skończony podzbiór I_j zbioru indeksów taki że

$$\mathrm{supp}(f_j) \subset \bigcup_{\alpha \in I_j} W_\alpha.$$

Niech $J = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Wtedy J jest przeliczalny i biorąc $G = \bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha$ mamy

$$\mu^*(W \cap G) \geq \phi(f_j) \geq \mu^*(W) - 2^{-j}.$$

Jako że zachodzi to dla dowolnego j to

$$\mu^*(W \cap G) \geq \mu^*(W).$$

Lecz

$$\mu^*(W \cap G) \leq \mu^*(W)$$

czyli

$$\mu^*(W \cap G) = \mu^*(W).$$

G jest przeliczalną sumą zbiorów mierzalnych, więc jest mierzalny. Z warunku mierzalności mamy

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \cap G) + \mu^*(W - G)$$

czyli

$$\mu^*(W - G) = 0.$$

Teraz, jeśli B jest dowolnym zbiorem to $\mu^*(B \cap (W - G)) = 0$ i

$$\mu^*(B \cap G) \leq \mu^*(B \cap W) \leq \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B \cap (W - G)) = \mu^*(B \cap G)$$

czyli

$$\mu^*(B \cap G) = \mu^*(B \cap W).$$

Na mocy mierzalności G

$$\mu^*(B) = \mu^*(B - G) + \mu^*(B \cap G).$$

Z równości wyżej

$$\mu^*(B) = \mu^*(B - G) + \mu^*(B \cap W) \geq \mu^*(B - W) + \mu^*(B \cap W)$$

Z podaddytywności dostajemy nierówność przeciwną, czyli

$$\mu^*(B) = \mu^*(B - W) + \mu^*(B \cap W).$$

Jako że B był dowolny oznacza to że W jest mierzalny. Skoro pokazaliśmy że otwarte podzbiory X są μ^* mierzalne to również podzbiory borelowskie X są μ^* mierzalne. A więc obciecie μ miary zewnętrznej μ^* do zbiorów borelowskich jest miarą. Trzeba spradzić że μ spełnia wymagania.

Z definicji dla dowolnych $B \in X$ mamy

$$\mu^*(B) = \inf_U \mu^*(U)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte. Lecz $\mu(X) < \infty$ więc dla borelowsko mierzalnych A biorąc $B = X - A$ mamy

$$\mu(A) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \sup_U \mu(U) = \inf_U (\mu(X) - \mu(U)) = \inf_U \mu(X - U)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte zawierające $B = X - A$. Lecz wtedy $K = X - U$ przebiega zbiory domknięte, a więc zwarte takie że $K \subset A$. Czyli

$$\mu(A) = \inf_{K \subset A} \mu(K)$$

gdzie K przebiega zbiory zwarte.

Pozostaje pokazać że dla ciągłych f mamy

$$\phi(f) = \int f d\mu.$$

Ustalmy $f \in C(X)$ taką że $0 \leq f(x) \leq 1$. Niech $\varepsilon > 0$, $n > 0$ będzie całkowite i niech $U_i = \{x : f(x) > i/n\}$. Niech $f_i \in C(X)$ będą takie że $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$ i $\phi(f_i) \geq \mu(U_i) - \varepsilon$. Wtedy jeśli $i/n < f(x) \leq (i+1)/n$ to $x \in U_j$ dla $j = 1, \ldots, i$ czyli $\sum 1_{U_i} = i$, czyli

$$\frac{1}{n} \sum 1_{U_i}(x) < f(x) \leq \frac{1}{n}(1 + \sum 1_{U_i}(x)$$

A więc

$$\int f d\mu \leq \int \frac{1}{n}(1 + \sum 1_{U_i}(x) = \frac{1}{n}(\mu(X) + \sum_{i=1}^{n} \mu(U_i)).$$

Z definicji f_i mamy

$$f > \frac{1}{n}\sum 1_{U_i}(x) \geq \frac{1}{n}\sum f_i$$

czyli

$$\phi(f) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(f_i) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu(U_i)-\varepsilon) = -\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(U_i)$$

Razem

$$\phi(f) \geq \int f d\mu - \frac{1}{n}\mu(X) - \varepsilon.$$

Jako że $n > 0$ i ε były dowolne to

$$\phi(f) \geq \int f d\mu.$$

Lecz $\mu(X) = \phi(1)$, czyli $\int 1 d\mu = \phi(1)$. Stosując teraz poprzednią nierówność do $1-f$ mam

$$\int f d\mu = \int 1 d\mu - \int (1-f) d\mu = \phi(1) - \int (1-f) d\mu \geq \phi(1) - \phi(1-f) = \phi(f)$$

czyli $\phi(f) \leq \int f d\mu$ co oznacza że

$$\phi(f) = \int f d\mu$$

dla $0 \leq f \leq 1$. Obie strony są liniowe więc mnożąc przez liczbę mogę zastąpić warunek $0 \leq f \leq 1$ przez $0 \leq f \leq M$ dla dowolnego M. Dodając wielokrotność stałej mogę zastąpić warunek $0 \leq f \leq M$ przez $N \leq f \leq M$ dla dowolnych N, M. Lecz X jest zwarta więc ciągła f jest ograniczona, czyli dla dowolnego f znajdę N, M takie że warunek jest spełniony. Czyli

$$\phi(f) = \int f d\mu$$

dla dowolnego $f \in C(X)$. □

Dla przestrzeni lokalnie zwarych sytuacja jest bardziej skomplikowana. Mianowicie w niektórych przypadkach warunki

$$\mu(A) = \inf_{U : A \subset U} \mu(U)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte i

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

gdzie K przebiega zwarte wykluczają się wzajemnie. Mianowicie, niech X będzie nieprzeliczalną sumą kopii odcinka $[0, 1]$. Funkcja o nośniku zwartym jest różna od 0 tylko na skończenie wielu odcinkach. Funkcjonal ϕ definiujemy jako całkę wzgledem miary Lebesque'a. Całkujemy tylko po tych odcinkach na których f nie jest tożsamościowo zerem i dodajemy wyniki. Zauważmy że zbiór otwarty U

który przecina nieprzeliczalnie wiele odcinków jest miary nieskończonej, mianicie istnieje $\varepsilon > 0$ taki że jest nieprzeliczalnie wiele odcinków I takich że $\mu(U \cap I) > \varepsilon$. Rozważmy teraz zbiór Z który ma z każdym odcinkiem tylko jeden punkt wspólny. Z jest domknięty a więc borelowski. Dowolny podzbiór zwarty Z jest skończony, więc

$$\sup_{K \subset Z} \mu(K) = 0$$

gdzie K przebiega zbiory zwarte. Jeśli U jest zbiorem otwartym zawierającym Z to U ma niepusty przekrój z dowolnym odcinkiem i jak zauważyliśmy jest miary nieskończonej. Czyli

$$\inf_{U: Z \subset U} \mu(U) = \infty$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte. A więc jeden warunek mówi że Z ma być miary 0, drugi że miary nieskończonej. Z punktu widzenia teorii całkowania bardziej naturalne jest przyjęcie że Z jest miary 0, co robimy niżej.

Lemat 7.4 *Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą a ϕ funkcjonałem liniowym dodatnim na $C_c(X)$. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara μ na podzbiorach borelowskich X taka że*

$$\phi(f) = \int f d\mu$$

dla $f \in C_c(X)$ i dla dowolnego borelowskiego $A \subset X$ mamy

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

gdzie K przebiega zwarte podzbiory A.

Dowód: Identycznie jak w Lemacie 7.3 pokazujemy że μ jest jednozancznie zdefiniowana na zbiorach otwartych. Lecz jeśli K jest zbiorem zwartym, to biorąc $f \in C_c(X)$ taką że $f(x) = 1$ dla $x \in K$ i $U = \{x : f(x) > 1/2\}$ mamy $\mu(U) < \infty$. Niech $V = U - K$. Wtedy $\mu(K) = \mu(U) - \mu(V)$ jest jednoznacznie zdefiniowana. A więc na mocy warunku

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

μ jest też jednoznacznie zdefiniowana dla zbiorów borelowskich.

Dla dowodu istnienia najpierw zdefniujemy μ na zbiorach otwartych U o domknięciu zwartym. Mianowicie, jeśli $K = \bar{U}$ jest zwarty to jak wyżej biorąc $h \in C_c(X)$ takie że $0 \leq H \leq 1$, $h(x) = 1$ dla $x \in K$ definujemy funkcjonał dodatni ψ_h na $C(\mathrm{supp}(h))$ wzorem $\psi_h(f) = \phi(hf)$. Stosując Lemat 7.3 do ψ_h otrzymujemy miarę ν_h na $\mathrm{supp}(h)$. Ograniczając ν_h do podzbiorów U otrzymujemy miarę μ_U spełniającą warunki twierdzenia dla $f \in C_c(U)$. Z jednoznaczności wynika że jeśli $U \subset V$ i V ma domknięcie zwarte to μ_V obciete do podbiorów U jest równe μ_U. To jednoznacznie definiuje μ dla wszystkich zbiorów borelowskich o domknięciu zwartym (ze względu na lokalną zwartość przestrzeni taki zbiór jest zawarty w zbiorze otwartym o domknięciu zwartym), przy tym spełniony jest warunek

$$\phi(f) = \int f d\mu$$

dla $f \in C_c(X)$.

Teraz definiujemy μ dla dowolnych borelowskich A wzorem

$$\mu(A) = \sup_U \mu(A \cap U)$$

gdzie U przebiega zbiory otwarte o domknięciu zwartym. Jeśli A jest zawarty w pewnym otwartym U o domknięciu zwartym to nowa definicja zgadza się ze starą a więc μ jest dobrze zdefiniowana dla zbiorów borelowskich. Na mocy Lematu 7.3 dla miar ν_h

$$\nu_h(A) = \sup_{K \subset A} \nu_h(K)$$

gdzie K przbiega zbiory zwarte. Jako że miara μ_U zgadza się z odpowiednim ν_h na podzbiorach U dla otwartch U o domknięciu zwartym i borelowskich A mamy

$$\mu(A \cap U) = \sup_{K \subset A \cap U} \mu(K)$$

czyli

$$\mu(A \cap U) \leq \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

co razem z definicją μ daje

$$\mu(A) \leq \sup_{K \subset A} \mu(K)$$

lecz skoro $K \subset A$ to $\mu(K) \leq \mu(A)$ i w supremum jest jest równość.

Pozostaje pokać że μ jest miarą, tzn. $\mu(\bigcup A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ dla rozłącznych borelowskich A_i. Przy ustalonym U o domknięciu zwartym μ jest miarą na podzbiorach U więc

$$\mu(U \cap \bigcup A_i) = \sum_i \mu(U \cap A_i) \leq \sum_i \mu(A_i).$$

Przechodząc do supremum mamy

$$\mu(\bigcup A_i) \leq \sum_i \mu(A_i).$$

A więc wystarczy pokazać nierówność przeciwną. Jest ona oczywista jeśli któreś $\mu(A_i)$ jest nieskończone (wtedy $\infty = \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup A_i)$), więc można zakładać że wszystkie $\mu(A_i)$ są skończone. Dla dwu zbiorów A_1 i A_2 niech $\varepsilon > 0$. Wybieramy U_i o domknięciu zwartym tak by

$$\mu(U_i \cap A_i) \geq \mu(A_i) - \varepsilon.$$

Wtedy $U = U_1 \cup U_2$ ma domknięcie zwarte, więc stosując addytywność μ dla podzbiorów U mamy

$$\mu(U \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu(U \cap A_1) + \mu(U \cap A_2) \geq \mu(U_1 \cap A_1) + \mu(U_2 \cap A_2)$$

$$\geq \mu(A_1) - \varepsilon + \mu(A_2) - \varepsilon = \mu(A_1) + \mu(A_2) - 2\varepsilon$$

A więc

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - 2\varepsilon.$$

Jako że ε był dowolny to

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Indukcyjnie

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

dla dowolnego n a więc

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

dla dowolnego n. Przechodząc z n do granicy mamy

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

co razem z pokazaną wcześniej nierównością przeciwną daje przeliczalną addytywność μ i kończy dowód. $\square$

8 Przestrzenie L^p

W dalszym ciągu X będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

W rozważaniach dotyczących całki wygodnie jest traktować funkcje jako jeden obiekt abstrachując od ich wartości w punktach. Ponieważ będziemy rutynowo pomijać zbiory miary zero wprodzamy specjaną notację. Mówimy że f i g są równe prawie wszędzie gdy różnią się co najwyżej na zbiorze miary zero. Zamiast pisać słowami prawie wszędzie będziemy używać skrót p.w.

Dwie funkcje mierzalne traktujemy jako równoważne wtedy i tylko wtedy gdy są równe p.w., tzn. różnią się co najwyżej na zbiorze miary zero. Dodatkowo, nie musimy wymagać by funkcje były zdefiniowane wszędzie, wystarczy gdy są zdefiniowane p.w., czyli poza zbiorem miary zero.

Definicja: Rzeczywista przestrzeń M funkcji mierzalnych to zbiór klas abstrakcji funkcji $X \mapsto \mathbb{R}$ względem relacji równości p.w. Przestrzeń M jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ z działaniami

$$c[f] = [cf],$$
$$[f] + [g] = [f + g]$$

Na M można również zdefiniować mnożenie $[f][g] = [fg]$.

Uwaga: w dalszym ciągu zwykle będziemy postępować tak jakby elementy M były funkcjami.

Zastępując w powyższej definicji funkcje o wartościach rzeczywistych przez funkcje o wartościach zespolonych otrzymamy defincję zespolonej przestrzeni funkcji mierzalnych.

Definicja: Niech $p \in [1, \infty)$. Przestrzeń L^p to podprzestrzeń przestrzeni funkcji mierzalnych składająca się z takich f że $\int |f|^p$. Na L^p definiujemy normę wzorem

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definicja: Przestrzeń L^∞ to podprzestrzeń przestrzeni funkcji mierzalnych składająca się z takich f że istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie że $|f|(x) < t$ p.w., przy tym $\|f\|_{L^\infty}$ to najmniejsze takie t.

Lemat 8.1 *Niech c będzie stałą, zaś $f, g \in L^p$. Wtedy*

$$\|cf\|_{L^p} = |c|\|f\|_{L^p},$$

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Dowód: Dla L^∞ mamy $|f|(x) \leq \|f\|_{L^\infty}$ dla p.w. x, $|g|(x) \leq \|g\|_{L^\infty}$ dla p.w. x, więc $|f+g|(x) \leq \|f\|_{L^\infty}+\|g\|_{L^\infty}$ dla p.w. x, czyli $\|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}+\|g\|_{L^\infty}$. Podobnie $|cf|(x) \leq |c|\|f\|_{L^\infty}$ dla p.w. x, czyli $\|cf\|_{L^\infty} \leq |c|\|f\|_{L^\infty}$. Pozostaje pokazać nierówności dla $p \in [1,\infty)$. Mamy

$$\|cf\|_{L^p} = \left(\int |cf|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|c|^p \int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |c|\|f\|_{L^p}$$

a więc równość wyżej jest jasna. Jeśli $\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} = 0$ to zarówno f jak i g są równe 0 p.w., co oznacza że również $f+g = 0$ p.w. co z kolei oznacza że $\|f+g\|_{L^p} = 0$, i nierówność wyżej jest oczywista. A więc możemy zakładać że $\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} > 0$. $x \mapsto |x|^p$ jest funkcją wypukłą dla $p \in [1,\infty)$, więc $|\alpha f + \beta g|^p \leq \alpha|f|^p + \beta|g|^p$ dla α i β takich że $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha+\beta = 1$. A więc

$$\|\alpha f + \beta g\|_{L^p}^p = \int |\alpha f + \beta g|^p \leq \alpha \int |f|^p + \beta \int |g|^p = \alpha\|f\|_{L^p}^p + \beta\|g\|_{L^p}^p.$$

Biorąc $\alpha = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}}$, $\beta = \frac{\|g\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}}$ mam

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \|\alpha\frac{f}{\alpha} + \beta\frac{g}{\beta}\|_{L^p}^p \leq \alpha\|\frac{f}{\alpha}\|_{L^p}^p + \beta\|\frac{g}{\beta}\|_{L^p}^p =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{\beta}{\beta^p}\|g\|_{L^p}^p = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p$$

a wiec

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

□

Lemat 8.2 *(Nierówność Höldera) Jeśli $f \in L^p$ i $g \in L^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ to fg jest całkowalna i*

$$|\int fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Dowód: Jeśli $q = \infty$ to $p = 1$ i mamy

$$|\int fg| \leq \int |fg| \leq \int \|g\|_{L^\infty}|f| = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}.$$

Podobnie wynik zachodzi gdy $p = \infty$ i $q = 1$. A więc dalej można zakładać że $p \in (1,\infty)$. Jeśli $\|f\|_{L^p} = 0$, to $f = 0$ p.w., wiec $fg = 0$ p.w., więc fg

jest całkowlana i zachodzi nierówność wyżej. Podobnie wynik jest jasny gdy $\|g\|_{L^p} = 0$. A więc jeśli trzeba mnożąc f przez $\frac{1}{\|f\|_{L^p}}$ i g przez $\frac{1}{\|g\|_{L^p}}$ mogę zakładać że $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Z uogólnionej nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$|fg| \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^p$$

więc

$$|\int fg| \leq \int |fg| \leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int g|^p = \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^p}^p = 1 = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}$$

□

Lemat 8.3 *Jeśli $f_n \in L^p$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p} < \infty$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny p.w. i istnieje $f \in L^p$ takie że*

$$\|f - \sum_{n=1}^{k} f_n\|_{L^p} \to 0$$

dla $k \to \infty$.

Dowód: Jeśli $p = 1$ to $\|f_n\|_{L^1} = \int |f_n|$, więc

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < \infty$$

co oznacza że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|(x)$ jest zbieżny p.w,. co oznacza że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny p.w. Jeśli $A \subset X$ jest zbiorem skończonej miary to wybierając q tak by $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ na mocy Lematu 8.2

$$\int_A |f| = \int |f| 1_A \leq \|f\|_{L^p} \|1_A\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \left(\int 1_A\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p} \mu(A)^{\frac{1}{q}}$$

czyli $\int_A |f| \leq C\|f\|_{L^p}$ z $C = \mu(A)^{\frac{1}{q}}$ co oznacza że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f|$$

jest zbieżny, czyli jak poprzednio szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny p.w. na A. Niech $A_n = \{x : |f(x)| > 0\}$ i $B_{n,j} = \{x : |f(x)| > \frac{1}{j}\}$. Wtedy $A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n,j}$. $B_{n,j}$ jest zbiorem o mierze skończonej bo

$$\frac{1}{j^p}\mu(B_{n,j}) = \int_{B_{n,j}} (\frac{1}{j})^p \leq \int_{B_{n,j}} |f_n|^p \leq \|f\|_{L^p}^p < \infty$$

a więc $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest przeliczalną sumą zbiorów o mierze skończonej. Ponieważ na zbiorze o mierze skończonej $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest p.w. zbieżny, to jest on również zbieżny p.w. na Y. Dla $x \notin Y$ mamy $f_n(x) = 0$ dla każdego n, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ składa się z samych zer, a więc jest zbieżny. Łącznie oznacza to że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny p.w, na X. Niech $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ Na mocy Lematu 6.15 i 8.1

$$\int |f|^p = \int \liminf_k |\sum_{n=1}^{k} f_n|^p \leq \liminf_k \int |\sum_{n=1}^{k} f_n|^p =$$

$$= \liminf_k \|\sum_{n=1}^{k} f_n\|_{L^p}^p \leq \liminf_k (\sum_{n=1}^{k} \|f_n\|_{L^p})^p = (\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p})^p$$

a więc

$$\|f\|_{L^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p}$$

Podobnie

$$\|f - \sum_{n=1}^{k} f_n\|_{L^p} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p}$$

czyli

$$\|f - \sum_{n=1}^{k} f_n\|_{L^p} \to 0$$

dla $k \to \infty$. □

Lemat 8.4 *L^p jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką $d(f,g) = \|f - g\|_{L^p}$.*

Dowód. $d(f,g) = 0$ oznacza że $\|f - g\|_{L^p} = 0$, czyli $\int |f - g|^p = 0$. Ale całka z funkcji nieujemnej jest równa 0 tylko wtedy gdy funkcja jest p.w. równa 0, czyli $|f - g| = 0$ p.w., czyli $f = g$ p.w., czyli $f = g$ jako elementy L^p. Dalej

$$d(f,h) = \|f - h\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p} + \|g - h\|_{L^p} = d(f,g) + d(g,h)$$

czyli zachodzi nierówność trójkąta. A więc L^p jest przestrzenią metryczną i pozostaje pokazać że jest przestrzenią zupełną. Niech f_n będzie ciągiem Cauchy'ego w L^p. Wybieram k_i dla $i = 1, \ldots$ tak by $k_{i+1} \geq k_i$ i

$$\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq 2^{-i}$$

dla $n, m \geq k_i$. Niech $g_i = f_{k_{i+1}} - f_{k_i}$. Mam $\|g_i\|_{L^p} \leq 2^{-i}$, więc szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$$

jest zbieżny, a więc szereg $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ jest zbieżny w L^p. Niech $h = f_{k_1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i$. Zauważny że $h = f_{k_i} + \sum_{j=i+1}^{\infty} g_j$, czyli

$$\|h - f_{k_i}\|_{L^p} = \|\sum_{j=i+1}^{\infty} g_j\|_{L^p} \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} \|g_i\|_{L^p} \sum_{j=i+1} \infty 2^{-j} = 2^{-i}$$

i dla $n \geq k_i$

$$\|h - f_n\|_{L^p} \leq \|f_n - f_{k_i}\|_{L^p} + \|h - f_{k_i}\|_{L^p} = 2^{-i} + 2^{-i} = 2^{-i+1}$$

a więc

$$\lim \sum_n \|h - f_n\|_{L^p} \leq 2^{-i+1}.$$

Ponieważ i jest dowolne oznacza to że

$$\lim \sum_n \|h - f_n\|_{L^p} = 0$$

czyli $f_n \to h$ w L^p co oznacza że L^p jest zupełna. □

8.1 Przestrzeń L^2

Dla $p = 2$ przestrzeń L^p ma specjalne własności. Zauważmy że wtedy normę można zapisać następująco:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int |f|^2 = \int f\overline{f}.$$

Definicja: Na przestrzeni L^2 wprowadzamy iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle$ wzorem

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}.$$

Lemat 8.5 *Niech $f, g, h \in L^2$, zaś $a, b \in \mathbb{C}$. Wtedy*

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f\rangle,$$

$$\langle af + bg, h\rangle = a\langle f, h\rangle + b\langle g, h\rangle,$$
$$\langle f, ag + bh\rangle = \overline{a}\langle f, g\rangle + \overline{b}\langle f, h\rangle,$$
$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

Lemat 8.6 *Jeśli $K \subset L^2$ jest domknięty i wypukły, to w K istnieje element o minimalnej normie.*

Dowód. Niech $t = \inf_{f\in K} \|f\|_{L^2}$. Wybieramy ciąg $f_n \in K$ tak by $t = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2}$. Niech $w_{n,m} = \frac{1}{2}(f_n + f_m)$. Ponieważ K jest wypukły to $w_{n,m} \in K$ i

$$t \leq \|w_{n,m}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}(\|f_n\|_{L^2} + \|f_m\|_{L^2}) \to t$$

dla $n, m \to \infty$. Dalej

$$\|w_{n,m}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4}\langle f_n + f_m, f_n + f_m\rangle = \frac{1}{4}(\langle f_n, f_n\rangle + \langle f_m, f_n\rangle + \langle f_n, f_m\rangle + \langle f_m, f_m\rangle)$$

czyli

$$4\|w_{n,m}\|_{L^2}^2 - \|f_n\|_{L^2}^2 - \|f_m\|_{L^2}^2 = \langle f_m, f_n\rangle + \langle f_n, f_m\rangle.$$

Ale
$$4\|w_{n,m}\|_{L^2}^2 - \|f_n\|_{L^2}^2 - \|f_m\|_{L^2}^2 \to 4t - t - t = 2t$$
dla $n, m \to \infty$. Mamy
$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m\rangle = \langle f_n, f_n\rangle - \langle f_m, f_n\rangle - \langle f_n, f_m\rangle + \langle f_m, f_m\rangle =$$
$$= \|f_n\|_{L^2}^2 + \|f_m\|_{L^2}^2 - (\langle f_m, f_n\rangle + \langle f_n, f_m\rangle) \to t + t - 2t = 0$$
dla $n, m \to \infty$. A więc f_n jest ciągiem Cauchy'ego czyli jest zbieżny w L^2 do pewnego f. Ponieważ K jest domknięty, więc $f \in K$. W przestrzeni metrycznej odległość jest funkcją ciągłą, więc
$$\|f\|_{L^2} = d(f, 0) = \lim d(f_n, 0) = \lim \|f_n\|_{L^2} = t.$$
□

Lemat 8.7 *Jeśli $V \subset L^2$ jest podprzestrzenią domkniętą, $f \in L^2$ to istnieją $g, h \in L^2$ takie że $f = g + h$, $g \in V$ zaś h jest ortogonalny do V.*

Dowód. Niech $K = f + V$. K jest zbiorem domkniętym i wypukłym więc na mocy Lematu 8.6 w K istnieje element h o minimalnej normie. Niech $g = f - h$. Wtedy $f = g + h$. Elementy K są postaci $f + v$ z $v \in V$, więc $h = f + v$ dla pewnego $v \in V$. Ale to oznacza że $f - h = f - f - v = -v \in V$, czyli $g = -v \in V$. Następnie dla $v \in V$ i rzeczywistego t
$$\|h + tv\|_{L^2}^2 = \langle h + tv, h + tv\rangle = \|h\|_{L^2}^2 + t^2\|v\|_{L^2}^2 + 2t\Re\langle h, v\rangle.$$
Funkcja $t \mapsto \|h + tv\|_{L^2}^2$ osiąga minimum dla $t = 0$, co jest możliwe tylko gdy $\Re\langle h, v\rangle = 0$. Ale również $iv \in V$, czyli $0 = \Re\langle h, iv\rangle = -\Im\langle h, v\rangle$, czyli łącznie $\langle h, v\rangle = 0$, czyli h jest ortogonalny do V. □

Definicja: Odwzorowanie ϕ określone na przestrzeni wektorowej nazywamy funkcjonałem liniowym jeśli dla dowonych skalarów a, b i wektorów v i w zachodzi równość
$$\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)a.$$

Lemat 8.8 *Niech ϕ będzie funkcjonałem liniowym ciągłym na przestrzeni L^2. Wtedy istnieje $v \in L^2$ takie że*
$$\phi(f) = \langle f, v\rangle$$

Dowód: Niech $W = \{w \in L^2 : \phi(w) = 0\}$. W jest podprzestrzenią domkniętą. Jeśli $W = L^2$ to $\phi = 0$ i dostaniemy wynik biorąc $v = 0$. W przeciwnym razie wybieramy f tak by $\phi(f) \neq 0$. Niech $f = g + h$ będzie rozkładem f na część z W i część ortogonalną do W (Lemat 8.7). Wtedy
$$\phi(f) = \phi(g + h) = \phi(g) + \phi(h) = \phi(h)$$

bo $g \in W$ i $\phi(g) = 0$. Niech $v = \frac{\overline{\phi(h)}}{\langle h,h \rangle} h$ i niech u będzie dowolnym elementem L^2. Biorąc $t = \frac{\phi(u)}{\phi(h)}$ i $w = u - th$ mamy

$$\phi(w) = \phi(u - th) = \phi(u) - t\phi(h) = 0$$

czyli $w \in W$ i $u = th + w$. Teraz

$$\langle u, v \rangle = \langle th + w, v \rangle = t\langle h, v \rangle = t\frac{\phi(h)}{\langle h, h \rangle}\langle h, h \rangle = t\phi(h) = \phi(u).$$

$\square$