Najpierw pokażemy jednowymiarowe wyniki pomocnicze. Zaczniemy od wersji lematu o wartości średniej. W dowodzie użyjemy ważną własność przestrzeni unormowanych:

Lemat 0.1 *(twierdzenie Hahna-Banacha)) Jeśli V jest przestrzenią unormowaną, V^* jest przestrznią sprzeżoną do V (tzn. $V^* = B(V, \mathbb{R})$ jest przestrzenią odwzorowań liniowych z V w $\mathbb{R}$), $v \in V$, to istnieje $\phi \in V^*$ taki że $\|\phi\| = 1$ i $\|v\| = \phi(v)$.*

Wniosek: Przy założeniach powyżej

$$\|v\| = \sup_{\|\phi\| \leq 1} |\phi(v)|$$

Lemat 0.2 *Jeśli V jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, $f : [a, b] \to V$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną na (a, b), to*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{t \in (a,b)} \|f'(t)\|$$

Dowód. Niech $\phi \in V^*$ spełnia $\|\phi\| \leq 1$ i niech $\eta(t) = \phi(f(t))$. Wtedy η jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b) i $\eta'(t) = \phi(f'(t))$. Na mocy twierdzenia o wartości średniej dla funkcji o wartościach rzeczywistych mamy

$$\eta(b) - \eta(a) = (b - a)\eta'(c)$$

dla pewnego $c \in (a, b)$. A więc

$$|\phi(f(b) - f(a))| = |\phi(f(b)) - \phi(f(a))| = |\eta(b) - \eta(a)| = |b - a||\phi(f'(c))|$$

$$\leq |b - a|\|\phi\|\|f'(c)\| \leq \|f'(c)\| \leq |b - a| \sup_{t \in (a,b)} \|f'(t)\|.$$

Na mocy wniosku z twierdzenia Hahna-Banacha mamy

$$\|f(b) - f(a)\| = \sup_{\|\phi\| \leq 1} |\phi(f(b) - f(a))| \leq \sup_{\|\phi\| \leq 1} |b - a| \sup_{t \in (a,b)} \|f'(t)\|$$

$$= |b - a| \sup_{t \in (a,b)} \|f'(t)\|.$$

□

Lemat 0.3 *V jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, $f : [a, b] \to V$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną na (a, b), $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $\|f'(t)\| \leq g(t)$ dla $t \in (a, b)$ to*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b g(t)dt$$

Dowód: Podobny do poprzedniego. Niech $h(t) = \int_a^t g(s)ds$. Niech $\phi \in V^*$ spełnia $\|\phi\| \leq 1$ i niech $\eta(t) = \phi(f(t)) - h(t)$. Wtedy η jest ciągła na $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b) i $\eta'(t) = \phi(f'(t)) - g(t)$. Mamy

$$|\phi(f'(t))| \leq \|\phi\|\|f'(t)\| \leq \|f'(t)\| \leq g(t)$$

czyli $\eta'(t) \leq 0$. Na mocy twierdzenia o wartości średniej dla funkcji o wartościach rzeczywistych mamy

$$\eta(b) - \eta(a) = (b-a)\eta'(c)$$

dla pewnego $c \in (a, b)$. A więc

$$\eta(b) - \eta(a) \leq 0$$

czyli

$$\phi(f(b) - f(a)) \leq h(b)$$

Stosując to samo rozumowanie do $-\phi$ mamy

$$|\phi(f(b) - f(a))| \leq h(b).$$

Na mocy wniosku z twierdzenia Hahna-Banacha mamy

$$\|f(b) - f(a)\| = \sup_{\|\phi\| \leq 1} |\phi(f(b) - f(a))| \leq h(b) = \int_a^b g(t)dt$$

□

Lemat 0.4 *V jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, $f : (a, b) \to V$ jest funkcją k-razy różniczkowalną, $[0, 1] \subset (a, b)$, to*

$$\|f(1) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\| \leq \frac{1}{k!} \sup_{t \in (0,1)} \|f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0)\|.$$

Dowód. Niech

$$\eta_{g,l}(t) = g(t) - \sum_{i=0}^{l} \frac{g^{(i)}(0)t^i}{i!}.$$

Mamy

$$\eta'_{g,l}(t) = g'(t) - \sum_{i=1}^{l} \frac{ig^{(i)}(0)t^{i-1}}{i!} = g'(t) - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(g')^{(i)}(0)t^i}{i!}$$
$$= \eta_{g',l-1}(t).$$

Inducyjnie, $\eta^{(k)}_{g,k}(t) = g^{(k)}(t) - g^{(k)}(0)$. Stosując to do f mamy

$$\eta^{(k)}_{f,k}(t) = f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0).$$

Następnie jako że $\eta_{f,k}$ jest k razy różniczkowalne to $\eta^{(i)}_{f,k}$ jest ciągła dla $i < k$. Teraz piszemy

$$\eta_{f,k}(1) = \eta_{f,k}(0) + \int_0^1 \eta'_{f,k}(t_1)dt_1 = \int_0^1 \eta'_{f,k}(t)$$

bo $\eta_{f,k}(0) = 0$. Następnie

$$\eta'_{f,k}(t_1) = \int_0^{t_1} \eta''_{f,k}(t_2)dt_2$$

i

$$\eta_{f,k}(1) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-2}} \eta_{f,k}^{(k-1)}(t_{k-1}) dt_{k-1} \dots dt_1$$

Stosując poprzedni lemat do $\phi(t) = \eta_{f,k}^{(k-1)}(t_{k-1}t)$ mamy

$$\|\phi(t)\| = \|\phi(t) - \phi(0)\| \leq \sup_{t\in(0,1)} \|\phi'(t)\| \leq t_{k-1} \sup_{t\in(0,1)} \|\eta_{f,k}^{(k)}\|$$

$$= t_{k-1} \sup_{t\in(0,1)} \|f^{(k)}(t)\|.$$

Razem z poprzednim wzorem daje to

$$\|\eta_{f,k}(1)\| \leq \int_0^1 \cdots \int_0^{t_{k-2}} t_{k-1} \sup_{t\in(0,1)} \|f^{(k)}(t)\| dt_{k-1} \dots dt_1$$

$$= \left(\int_0^1 \cdots \int_0^{t_{k-2}} t_{k-1} dt_{k-1} \dots dt_1 \right) \sup_{t\in(0,1)} \|f^{(k)}(t)\|.$$

Lecz

$$\int_0^1 \cdots \int_0^{t_{k-2}} t_{k-1}^l dt_{k-1} \dots dt_1 = \frac{1}{l} \int_0^1 \cdots \int_0^{t_{k-3}} t_{k-2}^{l+1} dt_{k-2} \dots dt_1$$

co indukcyjnie daje

$$\int_0^1 \cdots \int_0^{t_{k-2}} t_{k-1} dt_{k-1} \dots dt_1 = \frac{1}{k!}.$$

Czyli

$$\|\eta_{f,k}(1)\| \leq \frac{1}{k!} \sup_{t\in(0,1)} \|f^{(k)}(t)\|$$

co daje tezę lematu. □

Lemat 0.5 *V jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym, $f : U \to V$ jest funkcją k-razy różniczkowalną, $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ jest taki że dla każdego $t \in [0,1]$ mamy $x_0 + tv \in U$ to*

$$\|f(x+v) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(v,\dots,v)\| \leq \frac{\|v\|^k}{k!} \sup_{t\in(0,1)} \|f^{(k)}(x_0+tv) - f^{(k)}(x_0)\|.$$

Dowód. Niech $g(t) = f(x_0 + tv)$. Teraz wynik dostajemy z poprzedniego lematu zastosowanego do g. □