Analiza matematyczna 2B, Wykład 1

Lemat. Jeśli V i W są wielomiami jednej zmiennej nad ciałm i $V = QW + P$ gdzie Q jest ilorazem a P resztą z dzielenia V przez W, to $\mathrm{NWD}(V, W) = \mathrm{NWD}(P, W)$.

Dowód: $\mathrm{NWD}(P, W)$ dzieli P i W, a więc dzieli również V. Innymi słowy $\mathrm{NWD}(P, W)$ dzieli $\mathrm{NWD}(V, W)$. Podobnie $\mathrm{NWD}(V, W)$ dzieli V i W, a wię dzieli również P, czyli dzieli $\mathrm{NWD}(P, W)$. $\square$

Ten lemat prowadzi do algorytmu Euklidesa obliczania $\mathrm{NWD}(P, W)$:

1. Oblicz resztę P z dzielenia V przez W
2. Jeśli $P = 0$ to W daje wynik.
3. W przeciwnym razie zastąp parę (V, W) przez (W, P) i przejdz do kroku 1.

Śledząc jak wielomiany w kolejnych krokach algerytmu Euklidesa wyrażają się w terminach oryginalnych wielomianów V i W otrzymamy wielomiany A i B takie że

$$\mathrm{NWD}(V, W) = AV + BW$$

W szczególności, jeśli $\mathrm{NWD}(V, W) = 1$ to $1 = AV + BW$.

Definicja. Jeśli wielomian $P = \prod_{i=1}^{m} P_i^i$ i P_i są parami względnie pierwsze i każdy z P_i nie ma pierwiastków wielokrotnych, to taki rozkład nazywamy rozkładem bezkwaratowym.

Przykład: $P = (x^2 - 3)(x + 5)^3$ (tutaj wielomian $P_2 = 1$).

Uwaga: Rozkład na czynniki liniowe może wymagać powiększenia ciała. Ale algorytm Euklidesa produkje dzielnik pracując w oryginalnym ciele. Czyli największy wspólny dzielnik wielomianów nie zależy od ciała nad którym go obliczamy.

Uwaga: Rozkład bezkwadratowy możemy obliczyć wielokrotnie obliczając wspólne dzielniki. Dokładniej, jeśli rozkład bezkwadratowy P wynisi $P = \prod_{i=1}^{m} P_i^i$, to

$$G = \mathrm{NWD}(P, P') = \prod_{i=2}^{m} P_i^{i-1}$$

i $\tilde{G} = \frac{P}{G} = \prod_{i=1}^{m} P_i$ co daje $\mathrm{NWD}(\tilde{G}, P') = \prod_{i=2}^{m} P_i$ i $P_1 = \frac{\tilde{G}}{\mathrm{NWD}(\tilde{G}, P')}$.

Lemat. Jeśli $f = R/P$, i P ma rozkład bezkwadratowy $P = \prod_{i=1}^{m} P_i^i$, to istnieją wielomiany S i T takie że

$$\int f(x)dx = \int \frac{S}{P_1 \prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}} dx + \frac{T}{\prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}}$$

Dowód: Potrzebujemy równość

$$\frac{R}{P} = \frac{S}{P_1 \prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}} + \left(\frac{T}{\prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}} \right)'$$

Mamy

$$\left(\frac{T}{\prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}}\right)' = \left(T\prod_{i-2}^{m} P_i^{1-i}\right)' = \left(T' + T\sum_{i=2}^{m}(1-i)\frac{P_i'}{P_i}\right)\prod_{i-2}^{m} P_i^{1-i}$$

Niech $V = \prod_{i-2}^{m} P_i$ i

$$W = V\sum_{i=2}^{m}(1-i)\frac{P_i'}{P_i}.$$

Zauważmy że W jest wielomianem i jest względnie pierwszy z V. Teraz:

$$\left(\frac{T}{\prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}}\right)' = \left(T' + T\sum_{i=2}^{m}(1-i)\frac{P_i'}{P_i}\right)V\prod_{i-2}^{m} P_i^{-i} = (T'V + TW)\prod_{i-2}^{m} P_i^{-i}$$

$$= \frac{(T'V + TW)P_1}{P_1\prod_{i-2}^{m} P_i^{i}} = \frac{(T'V + TW)P_1}{P}$$

Następnie

$$\frac{S}{P_1\prod_{i-2}^{m} P_i^{i-1}} = \frac{SV}{P_1\prod_{i-2}^{m} P_i^{i}} = \frac{SV}{P}$$

Czyli potrzebujemy równość

$$\frac{R}{P} = \frac{SV}{P} + \frac{(T'V + TW)P_1}{P}$$

czyli

$$R = SV + (T'V + TW)P_1$$

Ta ostatnia równość oznacza że

$$R = SV + TWP_1 \mod VP_1$$

Ponieważ V i W są względnie pierwsze oraz V i P_1 są względnie pierwsze to również V i WP_1 są względnie pierwsze. A więc $NWD(V, WP_1) = 1$, czyli istnieją wielomiany A i B takie że $AV + BWP_1 = 1$. Teraz

$$R = R(AV + BWP_1) = RAV + RBWP_1$$

Niech T będzie resztą z dzielenia RB przez V zaś U będzie ilorazem. Czyli $RB = UV + T$ i równość wyżej daje

$$R = RAV + RBWP_1 = RAV + UVWP_1 + TWP_1 = (RA + UWP_1)V + TWP_1$$

Niech $S = RA + UWP_1 - T'P_1$. Teraz

$$R = (RA + UWP_1)V + TWP_1 = (RA + UWP_1 - T'P_1)V + T'P_1V + TWP_1$$

$$= SV + (T'V + TW)P_1$$

czyli znaleźliśmy potrzebne S i T. $\square$

Przykład: Chcemy obliczyć:

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 1}{(x^3 + x + 1)^2} ds$$

W notacj z lematu mamy $P_1 = 1$, $V = P_2 = x^3 + x + 1$ i

$$W = (1-2)\frac{P_2'}{P_2} V = -P_2' = -3x^2 - 1.$$

Następnie, $A = -\frac{18}{31}x + \frac{27}{31}$, $B = -\frac{6}{31}x^2 + \frac{9}{31}x - \frac{4}{31}$,

$$RB = -\frac{6}{31}x^6 - \frac{3}{31}x^5 + \frac{20}{31}x^4 - \frac{5}{31}x^3 - \frac{8}{31}x^2 - \frac{1}{31}x + \frac{4}{31} =$$

$$(-\frac{6}{31}x^3 - \frac{3}{31}x^2 + \frac{26}{31}x + \frac{4}{31})V - x^2 - x$$

czyli $T = -x^2 - x$ zaś iloraz $U = -\frac{6}{31}x^3 - \frac{3}{31}x^2 + \frac{26}{31}x + \frac{4}{31}$. Dalej $S = RA + UWP_1 - T'P_1 = RA + UW - T' = 0$. A więc

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 1}{(x^3 + x + 1)^2} ds = \frac{-x^2 - x}{x^3 + x + 1}.$$