

## Analiza matematyczna 2B, Wykład 2

**Uwaga 1.** Metodę Hermite'a można stosować nie tylko do wielomianów. Mia-  
nowicie, tak naprawdę pokazaliśmy że jeśli  $P_i$  są parami względnie pierwsze i  
bezkwadratowe zaś  $\alpha_i \neq -1$  to dla dowolnego wielomianu  $R$  istnieją wielomiany  
 $S$  i  $T$  takie że

$$\int RP_1^{-1} \prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i} dx = \int SP_1^{-1} \prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i+1} dx + T \prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i}.$$

$S$  i  $T$  można wyliczyć następująco: niech  $V = \prod_{i=2}^m P_i$  i  $W = V \sum_{i=2}^m (\alpha_i+1) \frac{P_i'}{P_i}$ .  
Przy pomocy rozszerzonego algorytmu Euklidesa znajdujemy wielomiany  $A$  i  $B$   
takie że  $1 = AW + BW P_1$ . Następnie  $T$  to reszta z dzielenia  $RB$  przez  $V$  zaś  
 $U$  to iloraz (czyli  $RB = UV + T$ ). Wtedy  $S = RA + UWP_1 - T'P_1$ .

**Uwaga 2.** Jest nieco ogólniejsza wersja: jeśli  $P_i, i = 1, \dots, m$  są bezkwadratowe  
i parami względnie pierwsze i  $\alpha_i \neq -1$  dla  $i = k+1, \dots, m$ , to istnieją wielomiany  
 $S$  i  $T$  takie że

$$\int R \prod_i^m P_i^{\alpha_i} dx = \int S \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i} \prod_{i=k+1}^m P_i^{\alpha_i+1} dx + T \prod_{i=1}^m P_i^{\alpha_i+1}.$$

### Podstawienia sprowadzające całki do funkcji wymiernych

Ogólną całkę algebraiczną można zapisać następująco:  $I = \int R(x, y) dy$  gdzie  $R$   
jest funkcją wymierną od  $x$  i  $y$ , zaś  $y$  spełnia równanie postaci  $P(x, y) = 0$  gdzie  
 $P$  jest wielimianem od  $x$  i  $y$ . Np.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int R(x, y) dx$$

dla  $R(x, y) = \frac{x}{y}$  i  $y = \sqrt{1+x}$  spełniającego równanie  $P(x, y) = y - (1+x) = 0$ .  
Zbiór rozwiązań równania  $P(x, y)$  nazywamy płaską krzywą algebraiczną. Aby  
uniknąć osobliwości będziemy zakładać że wielomian  $P(x, y)$  jest nierozkładalny,  
tzn. nie da się go zapisać jako produkt dwu niestałych wielomianów. W szcze-  
gólności oznacza to że nasza krzywa algebraiczna jest nierozkładalna, tzn. nie  
da się jej zapisać jako sumy dwu krzywych.

**Uwaga:** Nad liczbami rzeczywistymi może się zdarzyć że zbiór rozwiązań  $P(x, y) =$   
 $0$  jest pusty, np. dla  $P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ . Nad liczbami zespolonymi wielo-  
mian  $P$  jest wyznaczony jednoznacznie przez zbiór rozwiązań (uwzględniając  
nasze żądanie by  $P$  był nierozkładalny, bez niego  $P$  i  $P^2$  mają ten sam zbiór  
rozwiązań, ale  $P^2$  jest rozkładalny).

Krzywą algebraiczną nazywamy rodzaju 0 (lub w starszej terminologii jedno-  
bieżną) jeśli istnieją funkcje wymierne  $s$  i  $t$  takie że  $P(t(z), s(z)) = 0$ . Można  
pokazać że jeśli takie  $s$  i  $t$  istnieją, to istnieją też takie że odwzorowanie  $z \mapsto$   
 $((t(z), s(z)))$  jest odwracalne, tzn. istnieje funkcja wymierna  $u$  taka że  $z =$   
 $u(t(z), s(z))$ . Jeśli  $P$  zadaje krzywą rodzaju 0, to całkę  $\int R(x, y) dx$  można  
sprowadzić do całki z funkcji wymiernej:  $x = t(z), dx = t' dz$  i

$$\int R(x, y) dx = \int R(t(z), s(z)) t'(z) dz.$$

Po obliczeniu ostatniej całki wracamy do  $x, y$  przy pomocy funkcji  $u$ .

Przykład: Dla  $P(x, y) = y^2 - (1+x)$  można wziąć  $y$  jako zmienną, tzn. przyjmując  $s(z) = z$ ,  $t(z) = z^2 - 1$ . Wtedy  $t'(z) = 2z$  i

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \int 2z \frac{z^2 - 1}{z} dz = 2 \int (z^2 - 1) dz = \frac{2}{3} z^3 - 2z + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x} + C = \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) \sqrt{1+x} + C \end{aligned}$$

Użycie  $y$  jako zmiennej działa jeśli  $y$  jest pierwiastkiem z wielomianu liniowego. Ogólniej jeśli  $P(x, y)$  jest stopnia 1 względem  $x$  to mamy  $P(x, y) = c_0(y) + c_1(y)x$  i  $x = -\frac{c_0(y)}{c_1(y)}$ . W szczególności  $y$  może być pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z homografii:

$$y = \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{1}{n}}$$

wtedy  $P(x, y) = (cx + d)y^n - (ax + b)$  czyli jest stopnia 1 względem  $x$ .

Pisząc  $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$  możemy sprowadzić całki od pierwiastka z trójmianu kwadratowego do całek z funkcji wymiernych, choć w praktyce wygodniejsze są podstawienia w formie podanej przez Eulera.

Podstawienia tego typu działają dla wszystkich funkcji związanych z daną krzywą, ale nie istnieją dla krzywych rodzaju różnego od 0.

**Fakt.** Jeśli  $y = \sqrt{Q(x)}$  gdzie  $Q$  jest wielomianem stopnia  $n$  to odpowiednia krzywa jest rodzaju  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  gdzie  $\lfloor \cdot \rfloor$  oznacza część całkowitą.

W szczególności dla

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} dx$$

mamy pierwiastek z wielomianu stopnia 4 co daje rodzaj 1 i odpowiednia zamiana zmiennych nie istnieje.

**Uwaga.** Fakt że nie istnieje zamiana zmiennych dobra dla wszystkich funkcji związanych z daną krzywą nie wyklucza istnienia zamiany dla niektórych funkcji, np.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} dx$$

można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych.

Literatura: Np. Fichtenholz, tom 2 par 3.