Analiza matematyczna 2B, Wykład 3

Podstawienia w przypadku przestępnym

Jeśli $f(x) = R(\exp(x))$ gdzie R jest funkcją wymierną, to biorąc $t = \exp(x)$ mam $dt = \exp(x)dx = tdx$ i

$$\int f(x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Ogólniej, jeśli $f(x) = g'(x)R(\exp(g(x)))$, to biorąc $t = \exp(g(x))$ mam $dt = g'(x)\exp(g(x))dx = g'(x)tdx$ i

$$\int f(x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Jeśli $f = R(\sin(x), \cos(x))$ gdzie R jest funkcją wymierną, to pisząc $\sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$, $\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$ sprowadzam problem do funkcji zależącej tylko od $\exp(ix)$ dla której działa poprzednie podstawienie.

Aby uniknąć obliczeń na liczbach zespolonych można przestawić $\sin(x)$ i $\cos(x)$ w terminach $\tan(x/2)$. Mianowicie

$$\tan(x/2) = \frac{\frac{\exp(i\frac{x}{2})-\exp(-i\frac{x}{2})}{2i}}{\frac{\exp(i\frac{x}{2})+\exp(-i\frac{x}{2})}{2}} = \frac{\exp(i\frac{x}{2}) - \exp(-i\frac{x}{2})}{i(\exp(i\frac{x}{2}) + \exp(-i\frac{x}{2})} = \frac{\exp(ix) - 1}{i(\exp(ix) + 1)}$$

Używając oznaczenia $t = \tan(x/2)$ i $e = \exp(ix)$ mam

$$it = \frac{e-1}{(e+1)}$$

czyli $((e+1)it = e - 1$, czyli $e(it-1) = -(1+it)$ czyli

$$e = \frac{1+it}{1-it}.$$

Stąd

$$2i\sin(x) = e - \frac{1}{e} = \frac{1+it}{1-it} - \frac{1-it}{1+it} = \frac{4it}{1+t^2}$$

czyli

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Podobnie

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Wreszcie $dt = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}dx$. Lecz

$$4\cos^2(\frac{x}{2}) = (\exp(i\frac{x}{2}) + \exp(-i\frac{x}{2}))^2 =$$

$$= \exp(ix) + 2 + \exp(-ix) = 2(1+\cos(x))$$

więc $dt = \frac{1}{1+\cos(x)}$ i

$$dx = \frac{2}{1+t^2}.$$

Uwaga 1. Metoda Hermite'a stosować nie tylko do wielomianów. Mianowicie, tak naprawdę pokazaliśmy że jeśli P_i są parami względnie pierwsze i bezkwadratowe zaś $\alpha_i \neq -1$ to dla dowolnego wielomianu R istnieją wielomiany S i T takie że

$$\int RP_1^{-1}\prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i}dx = \int SP_1^{-1}\prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i+1}dx + T\prod_{i=2}^m P_i^{\alpha_i}.$$

S i T można wyliczyć następująco: niech $V = \prod_{i=2}^m P_i$ i $W = V\sum_{i=2}^m(\alpha_i+1)\frac{P'_i}{P_i}$. Przy pomocy rozszerzonego algorytmu Euklidesa znajdujemy wielomiany A i B takie że $1 = AW + BWP_1$. Następnie T to reszta z dzielenia RB przez V zaś U to iloraz (czyli $RB = UV + T$). Wtedy $S = RA + UWP_1 - T'P_1$.
Uwaga 2. Jest nieco ogólniejsza wersja: jeśli P_1, $i = 1, \ldots, m$ są bezkwadratowe i parami względnie pierwsze i $\alpha_i \neq -1$ dla $i = k+1, \ldots, m$, to istnieją wielomiany S i T takie że

$$\int R\prod_{i}^m P_i^{\alpha_i}dx = \int S\prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}\prod_{i=k+1}^m P_i^{\alpha_i+1}dx + T\prod_{i=1}^m P_i^{\alpha_i+1}.$$

Podstawienia sprowadzające całki do funkcji wymiernych
Ogólną całkę algebraiczą można zapisać następująco: $I = \int R(x,y)dy$ gdzie R jest funkcją wymierną od x i y, zaś y spełnia równanie postaci $P(x,y) = 0$ gdzie P jest wielimianem od x i y. Np.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int R(x,y)dx$$

dla $R(x,y) = \frac{x}{y}$ i $y = \sqrt{1+x}$ spełniającego równanie $P(x,y) = y - (1+x) = 0$. Zbiór rozwiązań równania $P(x,y)$ nazywamy płaską krzywą algebraiczną. Aby uniknąć osobliwości będziemy zakładać że wielomian $P(x,y)$ jest nierozkładalny, tzn. nie da się go zapisać jako produkt dwu niestałych wielomianów. W szczególności oznacza to że nasza krzywa algebraiczna jest nierozkładalna, tzn. nie da się jej zapisać jako sumy dwu krzywych.
Uwaga: Nad liczbami rzeczywistymi może się zdarzyć że zbiór rozwiązań $P(x,y) = 0$ jest pusty, np. dla $P(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. Nad liczbami zespolonymi wielomian P jest wyznaczony jednoznacznie przez zbiór rozwiązań (uwzględniając nasze żądanie by P był nierozkładalny, bez niego P i P^2 mają ten sam zbiór rozwiązań, ale P^2 jest rozkładanly).
Krzywą algebraiczną nazywany rodzaju 0 (lub w starszej terminologii jednobieżną) jeśli istnieją funkcje wymierne s i t takie że $P(t(z), s(z)) = 0$. Można pokazać że jeśli takie s i t istnieją, to istnieją też takie że odwzorowanie $z \mapsto ((t(z), s(z))$ jest odwracalne, tzn. istnieje funkcja wymierna u taka że $z = u(t(z), s(z))$. Jeśli P zadaje krzywą rodzaju 0, to całkę $\int R(x,y)dx$ można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej: $x = t(z)$, $dx = t'dz$ i

$$\int R(x,y)dx = \int R(t(z), s(x))t'(z)dz.$$

Po obliczeniu ostatniej całki wracamy do x, y przy pomocy funkcji u.
Przykład: Dla $P(x,y) = y^2 - (1+x)$ można wziąść y jako zmienna, tzn. przyjąc $s(z) = z$, $t(z) = z^2 - 1$. Wtedy $t'(z) = 2z$ i

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int 2z\frac{z^2-1}{z}dz = 2\int (z^2-1)dz = \frac{2}{3}z^3 - 2z + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x} + C = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3})\sqrt{1+x} + C$$

Użycie y jako zmiennej działa jeśli y jest pierwiastkiem z wielomianu liniowego. Ogólniej jeśli $P(x,y)$ jest stopnia 1 względem x to mamy $P(x,y) = c_0(y)+c_1(y)x$ i $x = -\frac{c_0(y)}{c_1(y)}$. W szczególności y może być pierwiastkiem n-tego stopnia z homografii:

$$y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

wtedy $P(x,y) = (cx+d)y^n - (ax+b)$ czyli jest stopnia 1 względem x.
Pisząc $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ możemy sprowadzić całki od pierwiastka z trójomianu kwadratowego do całek z funkcji wymiernych, choć w praktyce wygodniejsze są podstawienia w formie podanej przez Eulera.
Podstawienia tego typu działają dla wszystkich funkcji związanych z daną krzywą, ale nie istnieją dla krzywych rodzaju różnego od 0.
Fakt. Jeśli $y = \sqrt{Q(x)}$ gdzie Q jest wielomianem stopnia n to odpowidnia krzywa jest rodzaju $[\frac{n-1}{2}]$ gdzie [] oznacza część całkowitą.
W szczególności dla

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}dx$$

mamy pierwiastek z wielomianu stopnia 4 co daje rodzaj 1 i odpowiednia zamiana zmiennych nie istnieje.
Uwaga. Fakt że nie istnieje zamiana zmiennych dobra dla wszystkich funkcji związanych z daną krzywą nie wyklucza istnienia zamiany dla niektórych funkcji, np.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}dx$$

można sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych.
Literatura: Np. Fichtenholz, tom 2 par 3.