Analiza matematyczna 2B, Wykład 4

Ciała różniczkowe

Przy badaniu bardziej skomplikowanych wyrażeń wygodnie jest traktować funkcje przestępne jak zmienne. Np.

$$f = \frac{x \exp(x)}{1 + \exp(x)}$$

traktujemy jako funkcję wymierną zmiennej $\exp(x)$ o współczynnikach będących funkcjami wymiernymi od x. Symbolicznie $f \in K(\exp(x))$ gdzie $K = \mathbb{Q}(x)$.

Na funkcjach które rozważemy możemy wykonywać opracje arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, monożenie i dzielenie. Oznacza to że zbiór funkcji które rozważamy stanowi ciało. Funkcje możemy różniczkować, co łącznie daje nam ciało różniczkowe.

Wykonalność dzielenia wiąże się z tym że dopuszczamy punkty gdzie funkcja ma osobliwość, np. $f(x) = 1/x$ ma biegun dla $x = 0$. Również istotne jest to że mnożąc dwie funkcje różne od zera dostaniemy niezerową wartość (pokazaliśmy że taką własność dla funkcji rozwijających się w szeregi potęgowe, ale dla szerszych klas funkcji może ona nie zachodzić). Dokładniej, zakładamy że zbiór funkcji z którymi mamy do czynienia jest ciałem, co wyklucza pewne klasy funkcji. Np. wyklucza to wartość bezwzględną, bo

$$(|x| - x)(|x| + x) = 0$$

Ważną klasą funkcji są funkcje elementarne. Intuicyjnie, funkcje elementarne otrzymujemy ze zmiennej x, funkcji wykładniczej i logartmucznej przez operacje algebraiczne i składanie. Operacje algebraiczne oznaczją zarówno działania arytmetryczne jak i rozwiązanie równań wielomianowych, w szczególności pierwiastki. Precyzyjna definicja jest nieco inna:

1. **Definicja**. Ciało różniczkowe K nazywamy rozszerzeniem elementarnym ciała F jeśli istnieją elementy $\theta_1, \ldots, \theta_n \in K$ takie że $K = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ i pisząc $F_i(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi jeden z warunków niżej:

- θ_i jest algebraiczne nad F_i, tzn. istneje wielomian P o współczynnikach w F_i takie że $P(\theta_i) = 0$
- $\theta_i = \exp(u)$ dla pewnego $u \in F_i$
- $\theta_i = \log(u)$ dla pewnego $u \in F_i$

Przy tym θ_i będziemy traktować jako eksponentę czy logarytm tylko wtedy gdy nie zachodzi pierwszy przypadek. Np. $f(x) = \exp(\frac{\log(x)}{2}) = \sqrt{x}$ traktujemy nie jako eksponente a jako rozwiązanie równania $f^2(x) = x$. Podobnie $x = \log(\exp(x))$ nie traktujemy jako logarytm. Ogólniej będziemy zakładać że rozważanych wyrażeń nie da się zastąpić prostszymi (tzn. z mniejszą ilością eksponent i logarytmów) lecz równoważnymi wyrażeniami.

2. **Definicja**. Funkcję f nazywamy funkcją elementarną jeśli jest elementem pewnego rozszerzenia elementarnego ciała funkcji wymiernych.

3. Przykład: Niech $f(x) = \sqrt{\exp(x + \log(x))}$. $f \in K = \mathbb{Q}(x)(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ gdzie $\theta_1 = \log(x)$, $\theta_2 = \exp(x+\log(x))$, $\theta_3 = \sqrt{\exp(x + \log(x))}$. A więc f jest funkcją elementarną.

4. Uwaga: Dla danej funkcji elementarnej $f(x)$ istnieje wiele rozszerzeń elementarnych K ciała $\mathbb{C}(x)$ takich że $f \in K$. Mianowicie, mając jedno K możemy do niego dodać nadmiarowe elementy. Co gorsza, możliwe są różne zapisy tej samej funkcji. Np. funkcję z poprzedniego przykładu możemy zapisać jako $f(x) = \sqrt{x\exp(x)}$, i użyć $K = \mathbb{Q}(x)(\theta_1, \theta_2)$ dla $\theta_1 = \exp(x)$, $\theta_2 = \sqrt{x\exp(x)}$. Jednakże mając wyrażenie zadające $f(x)$ możemy w naturalny sposób zbudować rozszerzenie elementarne: każdemu logarytmowi i eksponecie które sie pojawią w f a także każdemy podwyrażeniu algebraicznemu (jak pierwiastek) przyporządkowujemy generator rozszerzenia. Różne wyrażenia zadające $f(x)$ mogą wtedy prowadzić do różnych rozszerzeń elementarnych. Dobrze jest uprościć wyrażenie przed budową rozszerzenia, tzn. drugie wyrażenia na f jest lepsze bo prowadzi do mniejszego rozszerzenia.
Głownym wynikiem o rozszerzeniach elementarnych jest twierzenie Liouville'a-Ostrowskiego. Zaniem je podamy potrzebujemy troche faktów. Po piersze, zauważmy że jeśli θ jest eksponentą czy logarytmem, to różniczkując wielomian czy funkcję wymierną od θ musimy też różniczkować współczyniki. Jeśli $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ to

$$P(\theta)' = \sum_{i=0}^{m} a_i'\theta^i + \theta' \sum_{i=1}^{m} i a_i \theta^{i-1}.$$

5. **Lemat**. Jeśli $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym F i $\theta = \log(u)$ dla pewnego $u \in F$, to stopień P' jest mniejszy lub równy niż stopień P. Jeśli przy tym współczynnik przy najwyższej potędze jest stały to stopień P' jest mniejszy niż stopień P. Jeśli $\theta = \exp(u)$ dla pewnego $u \in F$, to stopień P' jest mniejszy lub równy niż stopień P.
Dowód: Jeśli $\theta = \log(u)$, to $\theta' = \frac{u'}{u} \in F$. Jeśli $\theta = \exp(u)$, to $\theta' = u'\exp(u) = u'\theta$. W obu przypadkach θ' jest wielomianem od θ stopnia co najwyżej 1. Podany wyżej wzór na pochodną ma dwa człony, pierszy jest stonia co najwyżej m, drugi to θ' razy wielomian stopnia $m-1$. Oba człony są stopnia mniejszego lub równego m, a wiec i suma jest stopnia mniejszego lub równego m. Jeśli θ jest logarytmem to drugi człon jest stopnia $m-1$. Jeśli ponadto współczynniki przy najwyższej potędze w P jest stały to pierwszy człon jest stopnia mniejszego lub równego $m-1$, a więc i suma jest stopnia mniejszego lub równego $m-1$. $\square$

6. **Lemat**. Zakładamy $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym F i $\theta = \log(u)$ dla pewnego $u \in F$. Dodatkowo zakładamy że θ nie jest algebraiczne nad F, że wszystkie stałe należą do F i że P nie ma pierwiastków wielokrotnych. Wtedy P' jest względnie pierwsze z P.
Dowód: Przyjujemy za znany fakt że ciało F można zanurzyć w takie ciało w którym wielomian P rozkłada się na produkt wielomianów stopnia 1. Ponieważ wspólny dzielnik wielomianów nie zależy od ciało nad którym go liczymy można przyjąć że P jest postaci $P(\theta) = a_m(\theta - \theta_1)\dots(\theta - \theta_m)$. Wtedy

$$P(\theta)' = (\theta' - \theta_1')a_m(\theta - \theta_2)\dots(\theta - \theta_m) + (\theta - \theta_1)(a_m(\theta - \theta_2)\dots(\theta - \theta_m))'$$

Zauważmy że $\theta' - \theta_1' \neq 0$ mianowicie, w przeciwnym przypadku $\theta - \theta_1$ jest stałą, w więc z założenia należy do F. Lecz wtedy θ byłby algebraiczny nad F co wykluczyliśmy. A więc $P(\theta_1)' \neq 0$. Ponieważ dowolny pierwiastek P mogę przyjąć jako θ_1, oznacza to że P i P' nie mają wspólnych pierwiastków, czyli są względnie pierwsze. $\square$

W przypadku kiedy θ jest eksponentą musimy zachować ostrożność. Mianowicie, jeśli $\theta = \exp(u)$, to $\theta' = u'\exp(u) = u'\theta$, czyli dla $P(\theta) = \theta$ mamy $\mathrm{NWD}(P, P') = \theta$. Na szczęście jest to jedyny wyjątek.
7. **Lemat**. Zakładamy $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym F i $\theta = \exp(u)$ dla pewnego $u \in F$. Dodatkowo zakładamy że θ nie jest algebraiczne nad F, że wszystkie stałe należą do F, że P jest względnie pierwsze z θ i że P nie ma pierwiastków wielokrotnych. Wtedy P' jest względnie pierwsze z P.
Dowód: Podobny do poprzedniego dowodu. Kluczowym krokiem jest pokazanie że $\theta' - \theta_1' = u'\theta - \theta_1'$ nie będzie równe 0 gdy za θ podstawiny θ_1. Czyli potrzebujemy $u'\theta_1 - \theta_1' \neq 0$. Mamy

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)' = \frac{\theta_1'\theta - \theta_1\theta'}{\theta^2}$$

i

$$\theta_1'\theta - \theta_1\theta' = \theta_1'\theta - \theta_1 u'\theta = (\theta_1' - u'\theta_1)\theta$$

A więc równość $u'\theta_1 - \theta_1' = 0$ implikuje że $\frac{\theta_1}{\theta}$ jest stałą. Z założenia stałe należą do F i wykluczyliśmy $\theta_1 = 0$, więc θ byłaby algebraiczna nad F co również wykluczyliśmy. Czyli $u'\theta_1 - \theta_1' \neq 0$ co pozwala przeprowadzić pozostałą część dowodu jak poprzednio. $\square$

8. **Definicja**. Funkcję wymierną nazywamy funkcją wymierną właściwą jeśli stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.
Zauważmy że to czy wymierna jest funkcją wymierną właściwą nie zmienia się gdy pomnożymy lub podzielimy licznik i mianownik przez ten sam wielomian, bo tako operacja dodaje lub odejmuje tą samą liczbę od stopnia licznika i stopnia mianownika. A więc aby sprawdzić czy dana funkcja jest funkcją wymierną właściwą możemy użyć dowolny wygodny dla na zapis tej funkcji (nie trzeba używać zapisu nieskracalnego).
9. **Lemat**. Funkcję wymierną można w dokładnie jeden sposób zapisać jako sumę funkcji wymiernej właściwej i wielomianu.
Dowód: Niech $f = \frac{P}{S}$. Pisząc $P = QS + R$ gdzie Q jest ilowazem a R jest resztą z dzielenia P przez S dostanę

$$f = Q + \frac{R}{S}$$

Jako że stopień R jest mniejszy niż stopień S to $\frac{R}{S}$ jest funkcją wymierną właściwą, czyli otrzymaliśmy porządany rozkład. Odwrotnie, jeśli pewna funkcja f miałaby dwa różne rozkłady, to odejmując je otrzymalibyśmy rozkład $0 = Q + \frac{R}{S} = \frac{QS+R}{S}$ z niezerowym Q lub R. Ale wtedy $QS + R = 0$, czyli ponieważ stopiń R jest mniejszy niż stopień S i dzielenie z resztą dla wielomianów daje jednoznaczny wynik to $Q = 0$ i $R = 0$. Czyli przypuszczenie że są dwa różne rozkłady dla f prowadzi do sprzczności. $\square$

10. **Lemat**. Suma funkcji wymiernych właściwych i pochodna funkcji wymiernej właściwej jest funkcją wymierną właściwą.
Dowód: Niech $f_1 = \frac{P}{Q}$ i $f_2 = \frac{R}{S}$. Wtedy

$$f_1 + f_2 = \frac{PS + QR}{QS}$$

Z założenia stopin P jest mniejszy niż stopień Q, wiec stopień PS jest mniejszy niż stopień QS. Podobnie stopin QR jest mniejszy niż stopień QS, a wiec stopień $PS + QR$ jest mniejszy niż stopień QS, co oznacza że $f_1 + f_2$ jest funkcją wymierną właściwą. Następnie

$$f_1' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Z lematu 5 stopień P' jest mniejszy lub równy niż stopień P, a więc mniejszy niż stopień Q. Czyli stopień $P'Q$ jest mniejszy niż stopień Q^2. Podobnie stopień PQ' jest mniejszy niż stopień Q^2, a wiec stopień $P'Q - PQ'$ jest mniejszy niż stopień Q^2 co oznacza że f_1' jest funkcją wymierną właściwą. $\square$

Potrzebujemy jeszcze czysto algebraiczne operacje śladu i normy. Niech ciało $L = F(\theta)$ będzie rozszerzeniem F o element algbraiczny, czyli taki że istnieje wielomian P o współczynnikach w F spełniający $P(\theta) = 0$. Pomiędzy takimi P wybieramy wielomian najmniejszego stopnia. Taki wielomian nazywamy wielomianem minimalnym θ. Wtedy jeśli stopień P to m to dowolny element $y \in L$ można zapisać jednoznacznie w postaci $y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta^i$ z $a_i \in F$. Przypomnę że istnieje ciało K takie że P ma m pierwiastków w K (można np. wziąść algebraiczne domknięcie ciała F).
11. **Definicja**. Niech $\theta_1, \ldots, \theta_m$ będą pierwiastkami P w K i niech $y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta^i \in L$. Ślad $\mathrm{Tr}(y)$ definijemy wzorem:

$$\mathrm{Tr}(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta_j^i.$$

Normę $\mathrm{Norm}(y)$ definujemy wzorem

$$\mathrm{Norm}(y) = \prod_{j=1}^{m} (\sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta_j^i).$$

Komentarz: Norma niejawnie pojawia się przy usuwaniu niewymierności z mianownika. Mianowicie wybieramy K tak by $L \subset K$ i numerujemy θ_j tak by $\theta_1 = \theta$ (zawsze można to zrobić). Jeśli $f = \frac{z}{y}$ i $y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta^i$ to definiuje my N wzorem

$$N = \prod_{j=2}^{m} (\sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta_j^i)$$

Wtedy $Ny = \mathrm{Norm}(y)$ i $f = \frac{Nz}{Ny} = \frac{Nz}{\mathrm{Norm}(y)}$. Ponieważ $\mathrm{Norm}(y) \in F$ to w tej formie mianownik f nie zawiera θ. Nożna pokazać że N daje się zapisać w terminach θ, więc jeśli z zawiera θ tylko w liczniku to osiągneliśmy efekt eliminacji θ w mianowmika. Szczególnym przypadkiem tej procedury jest eliminacja pierwiastków kwadratowych z mianownika. Wtedy drugi pierwiastek to otrzymujemy mnożąc pierwszy przez -1, w więc N to y z θ zastąpionym przez $-\theta$.

12. **Fakt**. $\mathrm{Tr}(y) \in F$, $\mathrm{Norm}(y) \in F$. Wartości te nie zależą od tego jakie konkretnie K użyjemy do ich wyliczenia. Ponadto $\mathrm{Tr}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathrm{Tr}(y_1) + c_2 \mathrm{Tr}(y_2)$ dla $c_1, c_2 \in F$, $\mathrm{Norm}(y_1 y_2) = \mathrm{Norm}(y_1)\mathrm{Norm}(y_2)$. Dla $y \in F$ mamy $\mathrm{Tr}(y) = my$, $\mathrm{Norm}(y) = y^m$. Jeśli L jest ciałem różniczkowym to $\mathrm{Tr}(y') = \mathrm{Tr}(y)'$ i $\mathrm{Norm}(y') = \mathrm{Norm}(y)'$.

Przykład: Niech $F = \mathbb{Q}$ i $L = F(\sqrt{2})$. Elementy L można zapisać w postaci $a + \sqrt{2}b$ z $a, b \in \mathbb{Q}$. Wielomian $P(\theta) = \theta^2 - 2$. W ciele L wielomian P ma dwa pierwiastki $\theta_1 = \sqrt{2}$, $\theta_2 = -\sqrt{2}$. A więc można wziąć L jako K. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(a + \sqrt{2}b) = (a + \sqrt{2}b) + (a - \sqrt{2}b) = 2a,$$

$$\mathrm{Norm}(a + \sqrt{2}b) = (a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2$$

Przykład: Ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych o pierwiastek kwadratowy z -1. Czyli $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ i $P(i) = 0$ dla $P(\theta) = \theta^2 + 1$. Elementy $\mathbb{C}$ można zapisać jednoznacznie w postaci $a + bi$ z $a, b \in \mathbb{R}$. W $\mathbb{C}$ wielomian P ma dwa pierwsiastki $\theta_1 = i$, $\theta_2 = -i$. A więc można wziąć $\mathbb{C}$ jako K. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(a + ib) = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$$

$$\mathrm{Norm}(a + ib) = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$$

Przykład: Niech $F = \mathbb{Q}(x)(\log(x))$ i $L = F((x + \log(x))^{\frac{1}{3}})$. Wtedy $P(\theta) = \theta^3 - (x + \log(x))$. W ciele L wielomian P ma tylko jeden pierwiastek. Aby otrzymać dwa pozostałe trzeba dodać pierwiastki trzeciego stopnia z 1. Niech $\omega_1 = \exp(\frac{2\pi i}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. W $L(\omega_1)$ wielomian P ma trzy pierwiastki $\theta_1 = (x + \log(x))^{\frac{1}{3}}$, $\theta_2 = \omega_1 \theta_1$, $\theta_3 = \omega_1^2 \theta_1$. Dowolny element L można jednoznacznie zapisać w postaci $y = a + b\theta + c\theta^2$. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(y) = (a + b\theta_1 + c\theta_1^2) + (a + b\theta_2 + c\theta_2^2)(a + b\theta_3 + c\theta_3^2) = 3a$$

$$\mathrm{Norm}(y) = (a + b\theta_1 + c\theta_1^2)(a + b\theta_2 + c\theta_2^2)(a + b\theta_3 + c\theta_3^2) =$$

$$= a^3 + (b^3 - 3abc)(x + \log(x)) + c^3(x + \log(x))^2.$$

13. **Lemat**

$$\frac{\mathrm{Norm}(y)'}{\mathrm{Norm}(y)} = \mathrm{Tr}(\frac{y'}{y}).$$

Dowód.

$$\mathrm{Norm}(y) = \prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta_j^i).$$

Niech $y_j = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta_j^i$. Z wzoru na pochodną logarytmiczną iloczynu mamy

$$\frac{\mathrm{Norm}(y)'}{\mathrm{Norm}(y)} = \sum \frac{y_j'}{y_j}$$

Bez dowodu przymiemy że przyporządkowanie

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta^i \mapsto y_j = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta_j^i$$

jest homomorfizmem. Tzn. zapisując $\frac{y'}{y} = \sum_{i=0}^{m} b_i\theta^i$ mamy

$$\sum_{i=0}^{m} b_i\theta_j^i = \frac{y_j'}{y_j}$$

Ale to oznacza że

$$\mathrm{Tr}(\frac{y'}{y}) = \sum_j \frac{y_j'}{y_j}$$

co kończy dowód. $\square$

Komontarz: Więcej informaci o normie i śladzie można znaleźć w podręcznikach algebry. Np. w Algebrze Langa w rozdziale VIII (Teoria Galois) podrozdziale 5 (Norma i ślad).

14. **Lemat**(Twierdzenie Liouville'a-Ostrowskiego). Jeśli F jest ciałem różniczkowym, $f \in F$ i f ma funkcję pierwotną w pewnym rozszerzeniu elementarnym K ciała F to istnieją funkcje $v_i \in F$ i stałe $c_1, \ldots, c_l$ algebraiczne nad F takie że

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{l} c_i\frac{v_i'}{v_i} = v_0' + \sum_{i=1}^{l} c_i \log(v_i)'$$

Jeśli $\theta = \exp(u)$ dla pewnego $u \in F(\theta)$, każda stała z $F(\theta)$ należy do F, $f = g\theta$ z $g \in F$ i f ma funkcję pierwotną w pewnym rozszerzenu elementarnym K ciała F to istnieje $h \in F$ takie że $f = g\theta = (h\theta)'$.

Uwaga: Powyższe twierdzenie mówi że większość funkcji elementarnych nie pomaga w całkowaniu. Do znaleziemia całki wystarczą składniki f (z których budujemy ciało F) i logarytmy. Jeśli f jest eksponentą do dodatkowe logarytmy są niepotrzebne.

Uwaga: Równość w wersji z logarytmami jest bardziej intuicyjna, ale w dowodzić będzimy wersję z $\frac{v_i'}{v_i}$.

Skic dowódu Lematu: Najpierw założymy że wszyskie stałe w K należą do F. Niech $K = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Można pokazać (ale dowód tego pominiemy) że nawet jeśli oryginalnie w K pojawiły się nowe stałe to można θ_j tak wybrać że na początku będą dodane wszystkie stałe, a potem już tylko funkcje a stałe pozostaną te same. Czyli po dodaniu stałych do F dodawanie θ_j już nie doda nowych stałych. Niech $F_j = F(\theta_1, \ldots, \theta_j)$. Indukcyjnie pokażemy że istnieje l, stałe $c_i \in F$, $i = 1, \ldots, l$ i funkcje $v_i \in F_j$, $i = 0, \ldots, l$ takie że

$$f = v_0 + \sum_{i=1}^{l} c_i\frac{v_i'}{v_i}$$

Dla $F_n = K$ jest to założenie (wtedy $l = 0$). W kroku indukcyjnym trzeba pokazać jak mając $v_i \in F_j(\theta_{j+1})$ otrzymać nowe l i $v_i \in F_j$. Innymi słowy wystarczy pokazać twierdzenie gdy $K = F(\theta)$ jest rozszerzeniem o jeden element.

Jeśli θ jest algebraiczny to używamy własności odwzorowań Tr i Norm. Mianowicie jeśli stopień wielomianu minimalnego to m to używając Lemat 13 i Fakt 12 mamy

$$mf = \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(v_0) + \sum_{i=1}^{l} c_i \mathrm{Tr}(\frac{v_i'}{v_i}) = \mathrm{Tr}(v_0) + \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{\mathrm{Norm}(v_i)'}{\mathrm{Norm}(v_i)}$$

A więc zastępując v_0 przez $\frac{\mathrm{Tr}(v_0)}{m}$, c_i przez $\frac{c_i}{m}$ i v_i dla $i = 1, \ldots, l$ przez $\frac{\mathrm{Norm}(v_i)'}{\mathrm{Norm}(v_i)}$ otrzymam v_i i c_i dobre dla F (l się nie zmienia).
Jeśli $\theta = \log(u)$ to zakładam że θ nie jest algebraiczna nad F (w przeciwnym razie zastosowałbym poprzedni przypadek). Następnie zapisuję v_i dla $i = 1, \ldots, l$ w postaci $a_i \frac{P_i}{Q_i}$ gdzie P_i i Q_i są wielomianami ze współczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Na mocy Lematu 5 stopień P_i' jest mniejszy niż stopień P_i i stopień Q_i' jest mniejszy niż stopień Q_i. v_0 rozkładam na wielomian i funkcję wymierną właściwą, jak w Lemacie 9. Wtedy używając wzór na pochodną logarytmiczną iloczynu

$$f = Q_0' + \left(\frac{R}{S}\right)' + \sum c_i \left(\frac{a_i'}{a_i} + \frac{P_i'}{P_i} - \frac{Q_i'}{Q_i}\right)$$

Ponieważ na mocy Lematu 9 rozkład na sumę funkcji wymierną właściwej i wielomianu jest jednoznaczny to

$$f = Q_0' \sum c_i \frac{a_i'}{a_i}$$

bo pozostałe człony w równości wyżej to funkcje wymierne właściwe (używamy tu Lemat 10 by pokazać że $\left(\frac{R}{S}\right)'$ i suma jest funkcją wymierną właściwą). Pisząc $Q_0 = \sum_{k=0}^{m} d_k \theta^k$ z $d_m \neq 0$ mam

$$Q_0' = \sum_{k=0}^{m} d_k' \theta^k + \theta' \sum_{k=1}^{m} d_k k \theta^{k-1}$$

Ponieważ f jest stopnia 0 względem θ i podobnie $c_i \frac{a_i'}{a_i} \in F$ jest stopnia 0 to równość jest możliwa tylko wtedy gdy Q_0' jest stopnia 0. Zakładając że $m > 0$ oznacza to że $d_m' = 0$ czyli d_m to stała. Gdyby $m > 1$ to mielibyśmy równość

$$d_{m-1}' \theta^{m-1} + d_m m \theta' \theta^{m-1} = 0$$

czyli $d_{m-1}' + d_m m \theta' = 0$, czyli $\theta' - \left(\frac{d_{m-1}}{m d_m}\right)' = 0$ czyli $\theta - \frac{d_{m-1}}{m d_m}$ byłoby stałą czyli θ spełniałaby równie stopnia 1 o współczynnikach z F, czyli θ byłaby algebraiczna, a zakładamy że nie jest. A więc przypuszczenie że $m > 1$ prowadzi do sprzeczności. Czyli $m = 1$ lub $m = 0$. Jeśli $m = 1$ to powiększam $l = 1$ i dodaję nowy człon $d_1 \log(u)' = d_1 \frac{u'}{u}$, w przeciwnym razie l pozostawiam bez zmian. Człon d_0 przyjmuję jako nowe v_0. Pozostałe v_i zastępuję przez a_i a pozostałe c_i zostawiam bez zmian.
Pozostaje teraz rozważyć $\theta = \exp(u)$. Funkcje v_i dla $i = 1, \ldots, l$ zapisuję w postaci

$$v_i = a_0 \frac{P_i}{Q_i}$$

gdzie P_i i Q_i są wielomianami ze współczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Tym razem stopień P_i' jest taki sam jak stopień P. Jednakże łatwo otrzymać rozkład $\frac{P_i'}{P_i}$ na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Mianowicie, jeśli stopień P_i to p_i to współczynnik przy najwyższej potędze θ w P_i' to $p_i u'$. Ponieważ stopienie P_i i P_i' są równe to dzielenie P_i' przez P_i daje $p_i u'$ jako iloraz. Podobnie jeśli stopień Q_i to q_i to dzielenie Q_i' przez Q_i daje $q_i u'$ jako iloraz. A więc używając jednoznaczność rozkładu na wielomian i funkcję wymierną właściwą otrzymuję równość

$$f = Q_0' + \sum_{i=1}^{l} c_i(\frac{a_i'}{a_i} + p_i u' - q_i u')$$

Tym razem dla $Q_0 = \sum_{k=0}^{m} d_k \theta^k$ mam

$$Q_0' = \sum_{k=0}^{m} (d_k' + k u')\theta^k$$

i równość oznacza że O_0 jest stopnia 0. Czyli zastepując v_0 przez

$$d_0 + \sum_{i=1}^{l} c_i(p_i u' - q_i u')$$

i v_i dla $i = 1, \dots, l$ przez $\frac{a_i'}{a_i}$ i pozostawiając c_i bez zmiany dostanę równość z $v_i \in F$.
Jeśli $f = g\theta$ i θ jest eksponentą to stosujemy rozumowanie jak wyżej w przypadku eksponenty. Ale tym razem f nie ma członów stopnia 0, więc człony logarytmiczne które są stopnia 0 można pominąć i jedyny człon jaki zostaje to $d_1\theta$.
Dla kompletnego dowodu należałoby pokazać że c_i można wybrać algebraiczne nad F, my przyjmiemy to bez dowodu (dowód podał R. H. Risch, The problem of integration in finite terms, Trans. AMS 139 (1969) strony 167-189). $\square$

15. **Definicja** Eksponensem całkowym $\mathrm{Ei}(z)$ nazywamy funkcję taką że

$$Ei(z)' = \frac{\exp(z)}{z}$$

i

$$\lim_{x \to 0+} (\mathrm{Ei}(x) - \log(x)) = \gamma$$

gdzie γ jest stałą Eulera. Funkcja taka istnieje, bo $\mathrm{Ei}(z) - \log(z)$ można zadać jako szereg potegowy zbieżny dla dowolnego zespoloneg z (warunek z granicą ustala wyraz wolny szeregu)/
16. **Definicja** Funkcją błędu $\mathrm{erf}(z)$ nazywamy funkcję taką że

$$\mathrm{erf}(z)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$$

i $\mathrm{erf}(0) = 0$.

17. **Lemat**. Ani Ei ani erf nie są funkcjami elementarnymi.
Dowód. Na mocy Lematu 14 (twierdzenia Lioville'a-Ostrowskiego) gdby Ei było funkcją były elementarne to zachodziłaby równość

$$\frac{\exp(z)}{z} = (R(z)\exp(z))' = (R(z)' + R(z))\exp(z)$$

czyli

$$\frac{1}{z} = R(z)' + R(z)$$

Zauważmy że jeśli $R(z)$ ma w punkcie z_0 biegun rzędu k to $R(z)'$ ma w z_0 biegun rzędu $k+1$, a więc $R(z)' + R(z)$ ma w z_0 biegun rzędu $k+1$ (wynika to np. z rozkładu $R(z)$ na ułamki proste). Ale $\frac{1}{z}$ nie ma biegunów wielokotnych, czyli $R(z)$ nie może mieć biegunów, czyli $R(z)$ jest wielomianem. Ale $\frac{1}{z}$ ma biegun, więc równość jest niemożliwa. W przypadku erf otrzymalibyśmy równość

$$1 = R(z)' - 2zR(z)$$

Tak jak w przypadku Ei pokazujemy że R nie ma biegunów, więc jest wielomianem. Jeśli R jest stopnia m to $zR(z)$ zawiera z w potędze $m+1$. Najwyższa potęga z która się pojawia w R' to $m-1$ więc w $R(z)' - 2zR(z)$ pojawi się potęga $m+1$. Ale 1 jest stopnia 0, więc równość jest niemożliwa. $\square$