Analiza matematyczna 2B, Wykład 5

Całkowanie funkcji postaci $R\exp(u)$

Na mocy twierdzenia Lioville'a-Ostrowskiego wiemy że całka funkcji $R\exp(u)$ gdzie R i u są w mniejszym ciele rózniczkowym (np. są funkcjami wymiernymi) jeśli jest elementarna to też jest takiej postaci. Wiemy też że

$$\int \frac{\exp(x)}{x}$$

nie jest elementarna. Prowadzi to do pytania jak obliczać takie całki. Okazuje się że dla całek postaci $R(x)\exp(x)$ można podać metodę która działa podobnie jak metoda całkowania funkcji wymiernych i zawsze daje wynik, choć może on być wyrażony w terminach Ei jeśli nie istnieje całka elementarna. Mianowicie, funkcję $R(x)$ rozkładamy na ułamki proste:

$$R(x) = P(x) + \sum_i \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{i,j}}{(x - x_i)^j}$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem, k_i są rzędami biegunów R zaś $c_{i,j}$ są stałymi zespolonymi. Wtedy całkę z $R(x)\exp(x)$ możemy obliczać niezależnie dla każdego bieguna:

$$\int R(x)\exp(x) = \int P(x)\exp(x) + \sum_i \int \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{i,j}\exp(x)}{(x - x_i)^j}$$

Jeśli $k_i > 1$ to używając równość

$$\left(\frac{\exp(x)}{(x - x_i)^j}\right)' = -j\frac{\exp(x)}{(x - x_i)^{j+1}} + \frac{\exp(x)}{(x - x_i)^j}$$

czyli

$$\int \frac{\exp(x)}{(x - x_i)^{j+1}} = -\frac{\exp(x)}{j(x - x_i)^j} + \int \frac{\exp(x)}{j(x - x_i)^j}$$

możemy zmniejszyć rząd biguna o jeden. Po skończonej ilości kroków albo obliczymy naszą całkę albo otrzymamy całkę gdzie $k_i = 1$. Jeśli dostaniemy niezerowe człony z $k_i = 1$ to całka nie jest elementarna i trzeba wyrazić całkę w terminach Ei. Mianowicie,

$$\mathrm{Ei}(x - x_0)' = \frac{\exp(x - x_0)}{x - x_0} = \exp(-x_0)\frac{\exp(x)}{x - x_0}$$

co pozwala obliczyć całki z członów gdzie $k_i = 1$. Człon $P(x)\exp(x)$ całkujemy przez części. Łącznie naszkcowan wyżej procedura pozwala scałkować dowolną funkcję postaci $R(x)\exp(x)$, tyle że wynik może zawierać Ei. Zauważmy że Ei pełni przy całkowaniu funkcji postaci $R(x)\exp(x)$ podobną rolę do logarytmu. Całek dla których nasza procedura produkuje Ei nie da się obliczyć przy pomocy funkcji elementarnych (tak jak $\int \frac{1}{x}$ nie da się wyrazić w terminach funkcji wymiernych). Tak jak logarytm Ei może być użyte do całkowania bardziej skomplikowanych funkcji postaci $R(x)\exp(u(x))$, gdzie R i u są w mniejszym ciele różniczkowym, czy całek postaci $R(x, \exp(u(x))$ gdzie R jest funkcją wymierną dwu zmennych. Jednakże w ogólnej sytuacji nie ma gwarancji że Ei wystarczy do całkowania, np.

$$\int \frac{x^k}{\exp(x) - 1}$$

dla całkowitego $k \geq 1$ nie daje się wyrazić w terminach funkcji elementarnych i Ei.

Przy całkowaniu funkcji postaci $R(x)\exp(u(x))$ postępujemy analogicznie jak dla $R(x)\exp(x)$. Najpierw staramy się usunąc wielokrotne bieguny $R(x)$ nie będące biegunami u, można to robić albo używając rozkładu na ułamki proste, albo adaptując metodę Hermite'a. Pojedyncze beguny $R(x)$ nie będące biegunami u często pochodzą z członów typu Ei i moża je wyeliminować odejmując odpowiednie pochodne członów typu Ei. W prostych przypadkach człony Ei daje się znaleźć z rozkładu $R(x)$ na ułamki proste. Ogólna metoda wyznaczania takich członów jest dość skomplikowana i ją pominiemy. Jeśli udało się nam wyeliminować człony typu Ei (albo ich od początku nie było) to otrzymamy całkę gdzie $R(x)$ ma tylko bieguny wspólne z u (w przeciwnym razie całka nie daje się wyrazić w termianch znanych nam funkcji). Mamy równość

$$(H(x)\exp(u(x)))' = (H'(x) + u'(x)H(x))\exp(x)$$

u' jako pochodna jeśli ma biegun to jest on co najmniej rzędu $l \geq 2$. A więc jeśli $u(x)$ ma biegun w x_0 i $H(x)$ ma biegun rzędu k w x_0 to $H'(x)$ ma biegun rzędu $k+1$ w x_0, zaś $u'(x)H(x)$ ma w x_0 biegun rzędu $k + l > k + 1$. W więc $H'(x) + u'(x)H(x)$ ma w x_0 biegun rzędu $k + l$. Bazując na tej obserwacji można dobrać H tak by $R(x)\exp(u(x)) - (H(x)\exp(u(x)))'$ miało mniejszy rząd bieguna w x_0. Po skończonej liczbie kroków dojdziemy do R będącego wielomianem. W przypadku całek postaci $\int P(x)\exp(u(x))$ gdzie $P(x)$ i $u(x)$ są wielomianami całkowanie przez części pozwala obniżać stopień P tak by stał się mniejszy niż stopień u. Jeśli w wyniku tego zredukujemy P do zera, to całka jest elementarna, jeśli nie to całka jest nieelementarna. Może wtedy wymagać członów typu erf lub podobnych. Jeśli w całce $\int P(x)\exp(u(x))$ u ma beigumy, to możemy prowadzić całkowanie przez części w ten sposób by $P(x)$ było podzielne przez coraz wyższe potęgi mianownika u. Wiadomo że jeśli całka jest elementarna to w pewnym momencie P stanie się równy 0 i procedura się zatrzyma. Jeśli całka jest nieelemetarna to procedura całkowania przez części będzie działać w nieskończoność, produkując P coraz wyższego stopnia. Na podstawie oryginalnego P daje się wyznaczyć maksymalny możliwy stopień P który może się pojawić przy całkowaniu funkcji elementarnych. Wtedy jeśli w procedurze całkowania przez części pojawi się P większego stopnia to możemy zatrzymać procedurę konkludując że całka jest nieelementarna. Pominemy detale tego. W praktyce, jeśli pojawią się człony wyższego stopnia niż w oryginalnej całce to ma sens się poddać (całki elementarne gdzie potrzebne są człony wyższych stopni pojawiają się dość rzadko).