

### Analiza matematyczna 3B, Lista 1

1. Niech

$$f(x, y) = \frac{xy}{(y^2 + x^2)^2}$$

dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  i  $f(0, 0) = 0$ . Uzasadnij że przy dowolnym ustalonym  $x$  funkcja  $f$  jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna jako funkcja  $y$ . Podobnie, przy dowolnym ustalonym  $y$  funkcja  $f$  jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna jako funkcja  $x$ .

2. Oblicz (właściwe lub niewłaściwe) granice

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t),$$

gdzie  $f$  jest funkcją z zadania 1. Czy  $f$  jest funkcją ciągłą? Czy  $f$  jest mierzalna?

3. Niech  $g(x, y) = (1 + y) \exp(x + y^2)$  i niech  $\phi_{a,b}(t) = g(at, bt)$ . Znajdź liczby  $C$  i  $D$  takie że  $\phi'_{a,b}(0) = aC + bD$  (przy różniczkowaniu  $\phi_{a,b}$  traktujemy jako funkcję jednej zmiennej  $t$ ).

4. Niech

$$g(x, y) = \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$$

i niech  $\phi_{a,b}(t) = g(at, bt)$ . Uzasadnij przy ustalonym  $a$  i  $b$  funkcja  $\phi_{a,b}$  jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna jako funkcja  $t$ . Uzasadnij że nie istnieją liczby  $C$  i  $D$  takie że  $\phi'_{a,b}(0) = aC + bD$ .