Analiza matematyczna 3B, Lista 10

1. Niech ω_i, $i = 1, \dots, k$ będą formami liniowymi (stopnia 1) zaś v_i, $i = 1, \dots, k$ będą wektorami. Uzasadnij że

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(a)$$

gdzie a jest macierzą taką że $a_{i,j} = \omega_i(v_j)$.
Wskazówka: Trzeba rozpisać definicje.

2. Niech x_i będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^n$ zaś dx_i tworzą bazę dualną do bazy standartowej, tzn $dx_i(e_i) = \delta_{i,j}$ gdzie $\delta_{i,j} = 1$ dla $i = j$ zas w przeciwnym razie $\delta_{i,j} = 0$. Niech $\omega = \sum_I c_I dx_I$ gdzie I przebiega ciągi indeksów takie że $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ i $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$. Uzasadnij że $c_I = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.

3. Dla $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę ω_v wzorem $\omega_v = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$. Sprawdź że $\omega_v(w) = (v, w)$ (gdzie $(\cdot, \cdot)$ oznacza iloczyn skalarny). Dla danych u i v znajdź w takie że dla dowolnego z mamy wzór

$$\omega_u \wedge \omega_v \wedge \omega_z = (w, z) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

(takie w nazywamy iloczynem wektorowym u i v i oznaczamy przez $u \times v$).

4. Uzasadnij że każda forma dwuliniowa jest sumą formy antysymetrycznej i formy symetrycznej. Uzasadnij że forma trójliniowa zadana wzorem

$$F(x, y, z) = x_1 y_2 z_3$$

nie jest sumą formy symetrycznej i antysymetrycznej.

5. Niech $\omega = 2xydx$. Oblicz $d\omega$. Niech $\gamma_1(s) = (s, s)$, $\gamma_2(s) = (s, s^2)$. Oblicz $\int_{[0,1]} \gamma_i^* \omega$ dla $i = 1, 2$.

6. Niech $\omega = 2xydx + x^2 dy$. Oblicz $d\omega$. Oblicz $\int_{[0,1]} \gamma_i^* \omega$ dla $i = 1, 2$ gdzie γ_i są zdefiniowane w poprzednim zadaniu.

7. Niech $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Oblicz $d\omega$. Niech $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s))$. Oblicz $\int_{[0,2\pi]} \gamma^* \omega$.

8. Niech f będzie funkcją klasy C^1 na $\mathbb{R}^n$ i niech $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ też będzie klasy C^1. Uzasadnij że $\int_{[0,1]} \gamma^* df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.