Analiza matematyczna 3B, Lista 11

1. Niech ω będzie formą różniczkową klasy C^1 i stopnia k na $\mathbb{R}^n$. Pochodną ω traktujemy jako odwzorowanie $k+1$ liniowe, dokładniej piszemy

$$\omega'(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1})(x) = (\partial_{v_1}\omega(v_2, \ldots, v_{k+1}))(x).$$

Uzasadnij że $d\omega = (k+1)A(\omega')$ gdzie A oznacza antysymetryzację. Uzasadnij że antysymetryzacja jest potrzebna, tzn. że ω' zwykle nie jest antysymetryczna.

2. Tak jak w zadaniu 3 z poprzedniej listy dla $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę ω_v wzorem $\omega_v = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$. Jeśli v jest funkcją x to otrzymujemy w ten sposób formę różniczkową. Przy ustalonym x znajdź w takie takie że dla dowolnego z mamy wzór

$$(d\omega_v)(x) \wedge \omega_z = (w, z) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

(takie w nazywamy rotacją v i oznaczamy przez $\mathrm{rot}(v)$).

3. Niech $H \subset \mathbb{R}^{m+n}$ będzie hiperpowierzchnią wymiaru m klasy C^k. Uzasadnij że H lokalnie można potraktować jako wykres funkcji, tzn. dla dowolnego $x \in H$ istnieje otoczenie U, otocznie zera $V \subset \mathbb{R}^m$, funkcja $f : V \to \mathbb{R}^n$ klasy C^k i odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ klasy C^k z odwrotnością klasy C^k (dyfeomorfizm klasy C^k), takie dla $F : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ zadanego wzorem $F(x) = (x, f(x))$ funkcja $\Phi \circ F$ jest parametryzacją U.

4. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie klasy C^1, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ będzie zadane wzorem $F(x) = (x, f(x))$ (tzn. F odwzorowuje dziedzinę f na wykres f), $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny i $S = F(A)$. Niech forma różniczkowa ϕ na $\mathbb{R}^{n+k}$ będzie zadana wzorem $\phi(x, y) = u(x, y) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Uzasadnij że $(F^*\phi)(x) = u(x, f(x)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Wywnioskuj stąd że

$$\int_S \phi = \int_A u(x, f(x)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

5. Niech $H \subset \mathbb{R}^{m+1}$ będzie hiperpowierzchnią wymiaru m klasy C^1 i niech n_x będzie wektorem normalym do H jednostkowej długości. Zakładając że n_x jest ciągły definujemy formę η wzorem $\eta_x = \mathrm{i}_{n_x}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})$. Jeśli u jest funkcją całkowalną na H (względem miary powierzchniowej) to

$$\int_H u d\mu = c \int_H u\eta$$

gdzie $d\mu$ oznacza całkę względem miary powierzchniowej zaś $c = 1$ lub $c = -1$. Wskazówka: wystarczy to pokazać dla hiperpowierzchni sparametryzowanej pewną funkcją f. Wtedy trzeba pokazać wzór $cJ(f')dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = f^*\eta$.

6. Niech $\gamma(t) = (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$ i niech A będzie obszarem ograniczonym przez $\gamma([0, 2\pi])$. Oblicz pole A.