**Analiza matematyczna 3B, Lista 12**

Uwaga: We wszystkich zadaniach zakładamy że występujące tam funkcje są wystarczająco regularne, nawet jeśli to nie jest napisane w treści konkretnego zadania.

**1**. Niech $v$ będzie funkcją $n$ zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}^n$ zaś $f$ będzie funkcją $n$ zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}$. Sprawdź że $\mathrm{div}(vf) = (v, \nabla f) + f\mathrm{div}(v)$. Podobnie sprawdź że $d\omega_{vf} = df \wedge \omega_v + fd\omega_v$ gdzie $\omega_v$ jest jak w zadanich z poprzednich list. Dla $n = 3$ sprawdź że $\mathrm{rot}(vf) = \nabla f \times v + f\mathrm{rot}(v)$ gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy. Podaj postać tych wzorów w przypadku gdy $v$ jest stały.

**2**. Niech $v, w, \omega \in \mathbb{R}^3$ będą ustalonymi wektoremi zaś $c$ będzie stałą. Funkcję $f$ zadajemy wzorem $f(t, x) = \sin(ct - (\omega, x))$. Sprawdź że traktując $f$ jako funkcję tylko zmiennej $x$ mamy $\nabla f = -\omega \cos(ct - (\omega, x))$. Pole wektorowe $E$ zależne od czasu $t$ zadajemy wzorem $E(t, x) = vf$. Oblicz $\mathrm{div}(E)$ i $\mathrm{rot}(E)$. Sprawdź że jeśli $B(t, x) = wf$ to bezwymiarowe równania Maxwella (bez prądów i ładunków) $\mathrm{div}E = 0$, $\mathrm{div}B = 0$, $\mathrm{rot}(E) = -\partial_t B$, $\mathrm{rot}(B) = -\partial_t E$ są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $(\omega, v) = 0$, $(\omega, w) = 0$, $cv = \omega \times w$, $cw = -\omega \times v$. Uzasadnij że implikuje to że $\omega, v$ i $w$ zą wzajemnie prostopadłe, $c^2 = |\omega|^2$, $|v| = |w|$ i $v, w$. Podnadto, jeśli spełniony jest ostatni zestaw warunków to można dobrać zwroty $v$ i $w$ tak by poprzednie warunki były spełnione.

Komentarz: Oznacza to że równania Maxwella mają rozwiązanie będące falą. Związek $c^2 = |\omega|^2$ oznacza że w wariancie bezwymiarowym fala rozchodzi się z prędkością 1. Przy standartowych jednostkach daje to prędkość $(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ gdzie $\mu_0$ to przenikalność magnetyczna próżni zaś $\epsilon_0$ to przenikalność elektryczna próżni).

Wskazówka: Użyj wzory z zadania 1.

**3**. Niech $v$ i $w$ będą wektorami z $\mathbb{R}^3$ i niech

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Wtedy $J(A) = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - (v, w)^2}$. Podaj podobny wzór dla macierzy z trzema wierszami.

Wskazówka: Wynika to z wzoru $J(A) = \sqrt{\det A^T A}$.

**4**. Niech $f$ będzie funkcją klasy $C^2$ na $\mathbb{R}^k$. Wyraź

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{1}{r^{k+1}} \int_{|x|=r} (f(x) - f(0))$$

w terminach $f'(0)$ i $f''(0)$. Wywnioskuj stąd że jeśli dla dowolnego $R$ takiego że kula o środku w $x$ i promieniu $R$ jest zawarta w dziedzinie $f$ mamy

$$f(x) = \frac{1}{c_k R^{k-1}} \int_{|y|=R} f(y)$$

gdzie $c_k$ jest $k - 1$ wymiarową miarą sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^k$ to $f$ jest harmoniczna.

Uwaga: Jest to własność przeciwna do własności z zadania na konwersatorium.

**5**. Niech $\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ będzie formą objętości na $\mathbb{R}^3$. Uzasadnij że jeśli $H$ jest dwuwymiarową hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem zawartą w

$\mathbb{R}^3$, $n$ jest wektorem ortogonalnym do $H$, takim że $\mathrm{i}_n\eta$ zadaje orientację $H$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ jest funkcją o wartościach wektorowych, $\omega=\mathrm{i}_f\eta$ to

$$\int_H (f,n)=\int_H \omega.$$

Wskazówka: Rozłóż $f$ na część równoległą do $n$ i ortogonalną do $n$. Uzasadnij że jeśli $f$ jest ortogonalne do $n$ to $\omega=0$ na przestrzeni stycznej do $H$.
**6**. Niech $f,g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $C^2$ i niech $\Delta=\sum_{i=1}^k\partial_k^2$. Oblicz $\mathrm{div}(g\nabla f)$ w terminach $g,\nabla g,\nabla f,\Delta f$. Uzasadnij że jeśli $A$ jest obszarem z brzegiem klasy $C^1$ to

$$\int_A(\nabla g,\nabla f)+\int_A g\Delta f=\int_{\partial A}g(f,n)$$

gdzie $n$ jest jednostkowym wektorem normalnym do $\partial A$ skierowanym na zewnątrz. Podobnie

$$\int_A(f\Delta g-g\Delta f)=\int_{\partial A}(f(g,n)-g(f,n).$$

**7**. Uzasadnij że jeśli $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ jest klasy $C^2$ to $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f))=0$.
Wskazówka: Jest to wzór $dd\omega=0$ w innej notacji.
**8**. Sprawdź że $\mathrm{div}(\nabla f)=\Delta$ gdzie $\Delta$ jest zdefiniowany z zadniu 6.
**9**. Niech $U\subset\mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. Uzasadnij że jeśli $f:U\to\mathbb{R}^3$ jest klasy $C^1$ i $\mathrm{rot}(f)=0$ to istnieje funkcja $g$ taka że $f=\nabla g$. Podobnie, jeśli $\mathrm{div}(f)=0$, to istnieje $h$ takie że $f=\mathrm{rot}(h)$.
Wskazówka: Są to szczególne przypadki pokazanego na wykładzie Lematu Poincarego.
**10**. Niech $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem $\gamma(s)=(s,\log(s))$. Oblicz

$$\int_\gamma x_2^2$$

jako funkcję $a$ i $b$.
**11**. Które z poniższych form są pochodnymi zewnętrznymi:

$$x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3,$$

$$x_2dx_1+x_3dx_2+x_1dx_3,$$

$$2x_1x_2dx_1+x_1^2dx_2,$$

$$\exp(-x^2y^2)(ydx+xdy),$$

$$\frac{-2\ x\ y^2-2\ x}{x^4+2\ x^2+1}dx+\frac{2\ y}{x^2+1}dy,$$

$$x_3dx_1\wedge dx_2+x_2dx_1\wedge dx_3+x_1dx_2\wedge dx_3,$$

$$\sin(x_1+x_3)dx_1\wedge dx_2+\cos($$

**12**. Niech $f$ będzie funkcją harmoniczną dla $|x|<R$ i $f$ która jest funkcją radialną, tzn. jeśli $|x|=|y|$ to $f(x)=f(y)$. Uzasadnij że $f$ jest stała. Uzasadnij że funkcja $k$ zmiennych $U$ zadana wzorem

$$U(x)=\int_{|y|=R}|x-y|^{2-n}$$

jest harmoniczna dla $|x| < R$ i radialna. Wywnioskuj stąd że $U$ jest stała.
Wskazówka: Użyj wyniku zadania z konwersatorium.
Komentarz: Jest to dowód tego że jednorodna sfera wywiera zerowe przyciąganie na punkty wewnątrz.

**13**. Środek ciężkości obszaru ograniczonego $U \subset \mathbb{R}^n$ definiujemy wzorem

$$s(A) = \frac{1}{\lambda(A)} \int_A x$$

gdzie $\lambda(A)$ oznacza miarę Lebesque'a zbioru $A$ (jest to całka z funkcji wektorowo wartościowej). Uzasadnij że jeśli $A$ ma gładki brzeg to

$$s(A)_i = \frac{1}{2\lambda(A)} \int_{\partial A} (-1)^{i+1} x_i^2 dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n$$

gdzie $\widehat{dx_i}$ oznacza że pomijamy odpowiedni człon.

**14**. Niech $y \in \mathbb{R}^3$ i $R > 0$ będą ustalone i $H \subset \mathbb{R}^3 = \{x : |x - y| = R\}$. Oblicz

$$\int_H x_1^2 dx_1 \wedge dx_2 + x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2 dx_2 \wedge dx_3$$

gdzie na $H$ przyjmujemy orientację jako brzeg kuli.

**15**. Niech $a, b, c > 0$ będą ustalone i niech $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 1\}$. Oblicz

$$\int_H x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

gdzie na $H$ przyjmujemy orientację jako brzeg elipsoidy.

**16**. Używając wzór Stokesa oblicz

$$\int_{\partial H} \omega$$

gdzie $\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ zaś $H$ jest częścią przekroju sfery $\{(x, y, z) : (x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ z walcem $\{(x - r)^2 + y^2 \leq r^2\}$ taką że $z \geq 0$ na $H$ (innymi słowy bierzemy górną połowę przekroju).
Wskazówka: Przekształcając całkę z formy do całki powierzchniowej (jak w zadaniu 5) i z powrotem pokaż że

$$\int_H d\omega = 2R \int_H dx \wedge dy.$$