

Analiza matematyczna 3B, Lista 2

1. Sprawdź które z podanych funkcji są $o(|x|)$: $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2)$, $f_3(x_1, x_2) = x_1 \sin(\log(x_2))$ dla $x_2 > 0$ i $f_3(x_1, x_2) = 0$ dla $x_2 \leq 0$, $f_4(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\log(x_2)}$ dla $x_2 > 0$ i $f_4(x_1, x_2) = 0$ dla $x_2 \leq 0$, $f_5(x_1, x_2) = \frac{1 - \exp(x_1)}{\log(x_2)}$ dla $x_2 > 0$ i $f_5(x_1, x_2) = x_2^2$ dla $x_2 \leq 0$.
2. Z definicji sprawdź czy f jest różniczkowalna dla $f(x, y) = xy^2$, $f(x, y) = (x + 2y)(x + y)$, $f(x, y) = (x, (x + y)^2)$ (ta trzecia jest z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2).
3. Oblicz pochodną kierunkową f w kierunku wektora v w punkcie x dla $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, $v = (2, 1)$, $x = (1, -2)$ i dla $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sin(x_2) + x_2 \sin(x_3)$, $v = (1, 2, 1)$, $x = (1, 1, 0)$.
4. Oblicz pochodne cząstkowe następujących funkcji: $f(x, y) = y \sin(x)$, $f(x, y) = x^2(x + y^2)$, $f(x, y) = x \log(y) + y \log(x)$,

$$f(x, y, z) = \frac{1 + y + z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

w tych punktach gdzie są one zdefiniowane.

5. Które z poniższych funkcji są liniowe, które są wieloliniowe: $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = xy$, $f(x, y) = x^2 + y$, $f(M, N) = MN - NM$, $f(M, N) = N + MN$, $f(M, N) = M + N$ gdzie x i y są liczbami, zaś M i N są macierzami takich rozmiarów by wyrażenie miało sens.
6. Pochodna f w (x, y, z) to

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Oblicz pochodne cząstkowe i pochodną kierunkową f w kierunku $v = (1, -1, 2)$ (wszystko w punkcie (x, y, z)).

7. Pochodne cząstkowe $f(x_1, x_2, x_3)$ w punkcie x to $\partial_{x_1} f(x) = 3$, $\partial_{x_2} f(x) = -1$, $\partial_{x_3} f(x) = 1$, oblicz pochodną kierunkową f punkcie x w kierunku $v = (-1, 2, 1)$.
8. Zakładając że $g(x) = y$,

$$f'(y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

oblicz pochodną $f \circ g$ w punkcie x .

9. Oblicz pochodną $f(A, B) = ABA$ gdzie A i B są macierzami 2 na 2.
Wskazówka: Zapisz f jako złożenie funkcji liniowej i wieloliniowej.