Analiza matematyczna 3B, Lista 3

1. Na $\mathbb{R}^2$ definujemy normę wzorem $\|(x_1,x_2)\| = \max(3|x_1|, 4|x_2|, 3|x_1-x_2|)$. Uzasadnij że jest to norma. Naszkicuj $\{x : \|x\| < 1\}$.

2. Na $\mathbb{R}^2$ zadane są dwie normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Wiemy że $\{x : \|x\|_1 < 1\} = \{x : \|x\|_2 < 1\}$. Uzasadnij że $\|x\|_1 = \|x\|_2$.

3. Które z poniższych funkcji mają ciągłe pochodne cząstkowe (a więc są C^1): $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $f(x,y) = x\cos(y)$, $f(x,y) = |x|^3\cos(\sqrt{|x|})$, $f(x,y) = |x| - |x-y|$. Uzasadnij.

4. Na $\mathbb{R}^n$ norma L^p jest zadana wzorem

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dla jakich $p \in [1,\infty)$ norma jest różniczkowalna jako funkcja x? Czy jest ona wtedy C^1?

5. Niech $v \in \mathbb{R}^n$ spełnia $|v|_2 = 1$. Odwzorowanie R_v zadajemy wzorem $R_v(x) = x - 2v(x,v)$. Opisz R_v geometrycznie. Zapisz macierz R_v i uzasadnij że macierz transponowana jest taka sama. Uzasadnij że $R_v^2 x = x$ i że R_v jest ortogonalne.

6. Niech

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Uzasadnij że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ macierz $A(t)$ jest ortogonalna. Ponadto $A(t_1+t_2) = A(t_1)A(t_2)$. Czy A jako odwzorowanie z $\mathbb{R}$ w macierze 2×2 jest różniczkowalne?

7. Jeśli V_i, $i = 1..2$ są przestrzeniami unormowanymi to na $V_1 \times V_2$ możemy wprowadzić normę jednym ze wzorów:

$$\|(x_1,x_2)\|_1 = \|x_1\|_1 + \|x\|_2,$$

$$\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max(\|x_1\|_1, \|x\|_2),$$

$$\|(x_1,x_2)\|_2 = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x\|_2^2}.$$

Uzasadnij że

$$\|(x_1,x_2)\|_\infty \le \|(x_1,x_2)\|_2 \le \|(x_1,x_2)\|_1 \le 2\|(x_1,x_2)\|_\infty.$$

8. Jeśli V_i, $i = 1,\ldots,n+1$ są przestrzeniami unormowanymi zaś $M : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_{n+1}$ jest odwzorowaniem wieloliniowym to mówimy że M jest ograniczone jeśli istnieje $C \in [0,\infty)$ takie że dla dowolnych $x_1 \in V_1,\ldots,x_n \in V_n$ zachodzi nierówność $\|M(x_1,\ldots,x_n)\| \le C\|x_1\|\|x_2\|\ldots\|x_n\|$. Normę $\|M\|$ definiujemy jako kres dolny mozliwych C w definicji wyżej. Uzasadnij że

$$\|M\| = \sup_{\|x_i\|\le 1} \|M(x_1,\ldots,x_n)\|$$

Uzasadnij że z tak zdefinowaną normą przestrzeń $B(V_1,V_2,\ldots,V_{n+1})$ odwzorowań wieloliniowych ograniczonych staje się przestrzenią unormowaną.

9. Niech V_i, $i = 1,\ldots,n+1$ są przestrzniami euklidesowmi zaś $M : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_{n+1}$ jest odwzorowaniem wieloliniowym ograniczonym. Uzasadnij że M jest funkcją klasy C^1, a więc ciągłą.

Wskazówka: Użyj indukcję: pochodna M jest sumą funkcji zależących od mniejszej liczby zmiennych.

10. Niech V_i, $i = 1, 2, 3$ są przestrzniami unormowanymi. Uzasadnij że jeśli M jest odwzorowaniem dwuliniowym ograniczonym, to wzór $L_M(x)(y) = M(x, y)$ przy ustalonym x zadaje odwzorowanie liniowe ograniczone z V_2 do V_3, czyli dostajemy funkcję z V_1 w $B(V_2, V_3)$. Ponadto ta funkcja liniowa i ograniczona, czyli L_M jest to element $B(V_1, B(V_2, V_3))$. Uzasadnij że przyporządkowanie $M \mapsto L_M$ zadaje izometrię $B(V_1, V_2, V_3)$ z $B(V_1, B(V_2, V_3))$.

11. Na $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy normę L^1. Niech A będzie odwzorowaniem z macierzą $(a_{i,j})$, tzn. $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Uzasadnij że $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ (uwaga: tu przy liczeniu normy operatorowej używamy na $\mathbb{R}^n$ normę L^1).