

Analiza matematyczna 3B, Lista 4

1. Niech $V = \mathbb{R}^b$, $v \in V$ będzie ustalonym wektorem zaś $U \subset V$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. Uzasadnij że jeśli $\partial_v f(x) = 0$ dla $x \in U$ to dla $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$ i takich że $y = x + tv \in U$ mamy $f(x) = f(y)$. Uzasadnij że ta własność może nie być spełniona jeśli U nie jest zbiorem wypukłym.
2. Uzasadnij że jeśli funkcja f jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną na zbiorze otwartym i wypukłym U , to f spełnia warunek Lipschitza (a więc jest też jednostajnie ciągła).
3. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na \mathbb{R}^n taką że f' jest jednostajnie ciągła. Niech $\phi(x, v) = f(x + v) - f(x)$. Uzasadnij że

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x, tv)}{t} = f'(x)v$$

i że zbieżność jest jednostajna na $\mathbb{R}^n \times \{v \in \mathbb{R}^n : |v| \leq 1\}$.

4. Jeśli A jest macierzą n na n , to macierzową funkcję wykładniczą definiujemy wzorem

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Uzasadnij że szereg ten jest zbieżny w normie operatorowej dla dowolnego A . Pokaż że jeśli $AB = BA$ to $\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) = \exp(A+B)$. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oblicz $\exp(A)$, $\exp(B)$ i $\exp(A+B)$. Czy $\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$?

5. Funkcję $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy jednorodną rzędu α jeśli dla $t > 0$ i dowolnego $x \neq 0$ zachodzi równość $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Uzasadnij że różniczkowalna f jest funkcją jednorodną wtedy i tylko wtedy gdy $f'(x)x = \alpha f(x)$ (wzór Eulera).

6. Niech $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Pokaż że dla $n \geq 2$ $x \neq 0$ zachodzi równość $\sum_{i=1}^n \partial_i^2 |x|^{1-n} = 0$.

7. Inwersję na $\mathbb{R}^n - \{0\}$ zadajemy wzorem $I(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Oblicz pochodną I . Uzasadnij że dla dowolnego $x \neq 0$ jest ona postaci liczba rzeczywista razy odzworowanie ortogonalne.

8. Które z poniższych funkcji są C^2 : $f(x, y) = \exp(x+y)\cos(x^2)$, $f(x, y) = |(x, y)|^2$, $f(x, y) = |(x, y)|^3$, $f(x, y) = |(x, y)|^{3/2}$. Uzasadnij.

9. Dla jakich $p \in [1, \infty)$ norma L^p na \mathbb{R}^n jest k razy różniczkowalna dla $x \neq 0$?

10. Oblicz drugie pochodne cząstkowe $\partial_i \partial_j$ dla $f(x, y) = \exp(x+y^2)$, $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$.

11. Zapisz jawnie rozwinięcie Taylora rzędu 3 dla $f(x, y) = x \cos(x+y)$ w $(x, y) = 0$ (tzn. oblicz $f(0) + f'(0)h + (1/2)f^{(2)}(0)(h, h) + (1/6)f^{(3)}(0)(h, h, h)$).