Analiza matematyczna 3B, Lista 5

1. Niech $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$. Oblicz $(\partial_x\partial_y f)(0,0)$ i $(\partial_y\partial_x f)(0,0)$. Wyjaśnij otrzymany wynik.

2. Niech $f(x,y) = (x+y)\exp(-x^2-y^2)$. Znajdź punkty krytyczne f, sprawdź które z nich to minima czy maksima, znajdź globalne minimum i maksimum.

3. Niech $f(x,y,z) = xyz$. Znajdź maksimum f przy warunku że $x+y+z = 1$, $x,y,z > 0$.
Wskazówka: Zapisz $z = 1-x-y$ i sprowadź problem do funkcji dwu zmiennych.

4. Niech $f(x,y) = x^2 + cxy^2 + y^4$. Sprawdź że $(0,0)$ jest punktem krytycznym dla f. Czy druga pochodna pozwala rozstrzygnąc czy $(0,0)$ jest minimum f? Uzasadnij że jeśli $|c| \leq 2$ to f ma w $(0,0)$ minimum zaś jeśli $|c| > 2$ to $(0,0)$ nie jest minimum.

5. Niech f i g będą funkcjami klasy C^k. Uzasadnij że superpozycja $f\circ g$ jest też klasy C^k. Uzasadnij że jeśli f_1, f_2, g_1 i g_2 są klasy C^k, x_0 is y_0 są ustalone i takie że $g_1(x_0) = g_2(x_0)$, $f_1(y_0+h) - f_2(y_0+h) = o(\|h\|^k)$, $g_1(x_0+h) - g_2(x_0+h) = o(\|h\|^k$, to $f_1(g_1(x_0+h)) - f_1(g_2(x_0+h)) = o(\|h\|^k)$. Wywnioskuj stąd że rozwinięcie Taylora $f\circ g$ rzędu k zależy tylko od rozwninięć Taylora f i g, w szczególności przy wyznaczaniu rozwinięcia Taylora można zastąpić f i g wielomianami stopnia k. Użyj to by podać wzór na k-tą pochodną superpozycji.

6 Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy monotoniczną jeśli dla dowolnych x,y zachodzi nierówność dla iloczynu skalarnego $(x-y, f(x)-f(y)) \geq 0$ (dla $n=1$ mówiliśmy że f jest rosnąca). Uzasadnij że jeśli f jest różniczkowalna to jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x symetryczna część $f'(x)$ jest nieujemnie określona, tzn, $(f'(x)h,h) \geq 0$.

7 Niech $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności R i niech A będzie macierzą taką że $\|A\| < R$. Uzasadnij że

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

jest dobrze zdefinowane, tzn. szereg macierzowy jest zbieżny. Uzasadnij że ten szereg jest różniczkowalny i podaj wzorem pochodną.

8. Niech f bedzie funkcją k-razy różniczkowalną na $\mathbb{R}^n$ taką że $f^{(k)}$ jest jednostajnie ciągła. Niech

$$\phi(x,v) = f(x+v) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x)(v^{\otimes k})}{i!}.$$

Uzasadnij że

$$\lim_{t\to 0} t^{-k}\phi(x,tv) = 0$$

i że zbieżność jest jednostajna na $\mathbb{R}^n \times \{v \in \mathbb{R}^n : |v| \leq 1\}$.

9. Podaj przykład odwzorowania $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiego że $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$, lecz nie istnieje x taki że $f(x) = x$.

10. Niech $V = \mathbb{R}^n$ i niech $f : \mathbb{R}\times V$ będzie funkcją ciągłą i spełniającą warunek Lipschitza ze względu na drugi argument, tzn. istnieje stała M taka że

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq M\|y_1 - y_2\|$$

Odzorowanie h definiujemy wzorem

$$h(\phi)(s) = \int_0^s f(t,\phi(t))dt$$

Uzasadnij że istnieje $\varepsilon > 0$ takie że h jest odworowaniem zwężającym na $C([0,\varepsilon),V)$ (przestrzeni funkcji ciągłych na $[0,\varepsilon)$ o wartościach w V), tzn. istnieje $q < 1$ takie że dla dowolnych ϕ_1, ϕ_2 zachodzi nierówność

$$\sup_{s\in[0,\varepsilon)} \|h(\phi_1)(s) - h(\phi_2)(s)\| \leq q \sup_{s\in[0,\varepsilon)} \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|.$$

Uzasadnij że wartości h to funkcje różniczkowalne w sposób ciągły i że jeśli $h(g) = g$ to $g'(s) = f(s, g(s))$.