Analiza matematyczna 3B, Lista 6

1. Ustalmy n. Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$. Niech $S = \{x : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}$. Znajdź maksimum funkcji f na zbiorze S. Jak się to ma do średniej arytmetycznej i geometrycznej?

2. Funkcję o wartościach rzeczywistych f zdefiniowaną na zbiorze wypukłym G nazywany funkcją wypukłą jeśli

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

dla dowolnych $x, y \in G$ i $t \in [0,1]$. Jeśli nierówność jest ostra dla $x \neq y$ i $t \in (0,1)$, to mówimy że f jest ściśle wypukła. Niech G będzie dodatkowo zbiorem otwarytm zaś f będzie funkcją różniczkowalną. Uzasadnij że f jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy $f''(x)$ jest nieujemnie określona dla dowolnego $x \in G$. Jeśli $f''(x)$ jest dodatnio określona dla dowolnego $x \in G$ to f jest ściśle wypukła.

3. Uzasadnij że jeśli G jest zbiorem otwartym, wypukłym i ograniczonym, dla dowolnego n funkcja f_n jest klasy C^1, ciag f_n' jest jednostajnie zbieżny na G, i dla pewnego $x \in G$ ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny, to ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie na G do pewnej funkcji g klasy C^1. Ponadto $\lim_{n\to\infty} f_n' = g'$.

4. Uzasadnij że jeśli M jest funkcją k-liniową, to

$$\|M^{(l)}(x)\| \leq \frac{k!}{(k-l)!}\|x\|^l\|M\|$$

dla $l \leq k$.

5. Uzasadnij że jeśli M_k dla $k = 0, \ldots$ jest funkcją k-liniową (w szczególności M_0 to stała) zaś $N > 0$, $R > 0$ i C są stałymi takimi że $\|M_k\| \leq Ck^N R^k$ to dla $\|x\| < r < \frac{1}{R}$ szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k(x^{\otimes k})$$

jest jednostajnie zbieżny. Ponadto szereg ten można różniczkować wyraz po wyrazie otrzymując szereg spełniający analogiczny warunek. Wywnioskuj stąd że taki szereg definiuje funkcję klasy C^∞.

6. Uzasadnij że szereg macierzowy

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k$$

definiuje funkcje klasy C^∞ dla $\|A\| < 1$. Wywnioskuj stąd że odwrotność macierzowa jest klasy C^∞ na zbiorze macierzy odwracalnych.

7. Bazując na twierdzeniu o funkcji uwikłanej z k równym 1 uzasadnij że funkcja macierzowa $A \mapsto A^{-1}$ jest klasy C^1 na zbiorze macierzy odwracalnych i oblicz jej pochodną. Uzasadnij że w dowodzie twierdzenia o funkcji uwikłanej dla klasy C^k potrzebujemy wiedzieć że odwrotność macierzowa jest klasy C^{k-1}, zaś jako wniosek z twierdzenia dla klasy C^k pokażemy że odwrotność macierzowa jest klasy C^k. Innymi słowy uzasadnij ze twierdzenie o funkcji uwikłanej dla klasy C^k i przynależność odwrotności macierzowej do klasy C^k możemy pokazać razem przez indukcję względem k.

8. Zakładamy że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem klasy C^1. Uzasadnij że jeśli dla pewnego x istnieje lewa odwrotność g klasy C^1 w otoczeniu punktu $f(x)$, tzn. $(g \circ f)(x) = x$ w pewnym otoczeniu x, to $m \geq n$. Co można powiedzieć jak istnieje lewa odwrotność?

9. Niech $f(x, y, z) = \log(x + y + z - 2)\exp(x + y) - 2x + y + z$. Oblicz pochodne cząstkowe w punkcie $(1, 1)$ dla funkcji ψ będącej rozwiązaniem równania $f(x, y, \psi(x, y)) = 0$ takim że $\psi(1, 1) = 1$.

10. Niech $f(E, e) = E - e\sin(E)$ i niech $M > 0$ będzie stałą. Uzasadnij że w pewnym otoczeniu 0 istnieje funkcja ϕ taka że $f(\phi(e), e) = M$. Ponadto ϕ jest klasy C^∞. Oblicz pierwszą i drugą pochodną ϕ dla $e = 0$.

Komentarz: Jest to równanie Keplera, które pojawia się w mechanice nieba.

11. Niech $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Mamy $f(1, 0) = 0$. Uzasadnij że nie istnieje ciągła funkcja g zdefiniowana w otoczeniu $x = 1$, taka że $f(x, g(x)) = 0$. Wyjaśnij dlaczego nie można użyć twierdzenia o funkcji uwikłanej.

12. Niech $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x)$. Uzasadnij że istnieje więcej niż jedna funkcja ciągła g zdefiniowana w otoczeniu $x = 0$ taka że $f(x, g(x)) = 0$, ale nie istnieje funkcja różniczkowalna w $x = 0$ o tej własności. Jeśli $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y)(x^2 + y^2 + 2y)$ to istnieje wiecej niż jedna funkcja g klasy C^1 zdefiniowana w otoczeniu $x = 0$, taka że $f(x, g(x)) = 0$.