Analiza matematyczna 3B, Lista 7

1. Niech $f(x,y) = x^2 + xy + \cos(\pi y)$. Znajdź płaszczyznę styczną do wykresu f w punkcie $(1, 1/2)$.

2. Niech A będzie zbiorem macierzy ortogonalnych wymiaru 3. Znajdź funkcję f taką że $A = \{x : f(x)\}$ i pochodna f ma rząd maksymalny. Wyznacz hiperpłaszczyznę styczną do A w identyczności.

3. Użyj metodę mnożników Lagrange'a do wyznaczenia maksimum $f(x,y) = (x,y)$ gdzie $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\|x\|^p = \|y\|^q = 1$ przy ustalonym p, q takim że $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 1$.

4. Niech $f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ zaś $A = \{(x,y,z) : x, y, z > 0, g(x,y,z) = 0\}$. Uzasadnij że f osiąga maksimum na A, napisz metodą mnożników Lagrange'a układ równań spełniany przez maksimum, sprawdź że $(3^{-1/2}, 6^{-1/2}, 1/3)$ spełnia ten układ.

5. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1. O f zakładamy że $f(0) = 0$ i że w pewnym otoczniu 0 funkcja f ma lewą odwrotność klasy C^1. Uzasadnij że w pewnym otoczeniu 0 funkcja f ma prawą odwrotność.

6. Sprawdź że dla $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \exp(z)$ zbiór $A = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ jest hiperpowierzchnią gładką.

7. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie hiperpowierzchnią gładką wymiaru $k < n$ i niech $x \in A$. Uzasadnij że istnieje otoczenie V punktu x i indeksy $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ takie że odwzorowanie $\phi(y) = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k})$ ma rząd k na V.

8. Niech $f(x,y,z) = x(\cos(y), \sin(y)\cos(z), \sin(y)\sin(z))$. Uzasadnij że dla $x \neq 0$ pochodna f jest odwracalna.