Analiza matematyczna 3B, Lista 8

1. Niech A będzie dowolnym ustalonym zbiorem. Uzasadnij że jeśli dla pewnego k miara zewnętrzna Hausdorffa $h_k(A)$ jest skończona to $h_l(A) = 0$ dla $l > k$. Jeśli $h_k(A) > 0$ to dla $h_l(A) = \infty$ dla $l < k$.

2. Oblicz jakobiany następujących odwzorowań:

$$g(u, v) = ((u^2 - v^2)/2, uv)$$

$$g(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v))$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}(1, x_1, x_2, x_3)$$

3. Użyj twierdzenia Fubiniego i współrzęnych biegunowych (sferycznych) aby pokazać że

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2)dx = c_n/2 \int_0^\infty t^{n/2-1}\exp(-t)dt$$

gdzie c_n jest powierzchnią sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Wywnioskuj stąd wzór na c_n w terminach $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$.
Komentarz: jest to chyba najłatwiejsza droga do obliczenia miary kuli jednostkowej i powierzchni sfery.

4. Oblicz całkę $\int_K yds$ wzgledem miary powierzchniowej (długości łuku) gdzie K jest spójnym podzbiorem paraboli zadanej równaniem $y^2 = 2x$.

5. Zapisz w terminach całki długość spójnego fragmentu elipsy o równaniu $x^2 + y^2/a = 1$ gdzie $a > 0$ jest ustalonym parameterem.

6. Oblicz $\int_A \|x\|^{-\alpha}$ gdzie $A = \{x \in \mathbb{R}^n : r < \|x\| < R\}$ zaś α jest parametrem.

7. Oblicz całki

$$\int_A (1 + x^2 + y^2)^{-1}dxdy,$$

$$\int_A \cos(x^2 + y^2)dxdy$$

gdzie $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \pi/4\}$.

8. Niech $f(x_1, \ldots, x_n) = (\phi(x_1), x_2, \ldots, x_n)$ gdzie ϕ jest funkcją klasy C^1. Pokaż że dla takich f twierdzenie o zamianie zmiennych można łatwo uzasadnić.

9. Niech f będzie równiczkowalna w obszarze A. Uzasadnij że jakobian odwzorowania z A na wykres f, tzn, Jg' dla $g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$ jest zadany wzorem

$$Jg'(x) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x)}.$$

10. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ zaś $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna. Uzasadnij że dla $k < n$ obraz $f(A)$ jest miary Lebesque'a 0.