Analiza matematyczna 3B, Lista 9

1. Niech $r_1 > r_2$ i

$$f(t_1, t_2) = ((r_1 + r_2 \sin(t_2)) \sin(t_1), (r_1 + r_2 \sin(t_2)) \cos(t_1), r_2 \cos(t_2)).$$

Uzasadnij że f ma rząd 2 i jest różnowartościowa na $A = (-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$. Ponadto $f(\mathbb{R}^2) = F(A)$ i obraz f jest hiperpowierchnią gładką. Oblicz powierzchnię $F(A)$.

2. Niech $G \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem otwartym i $f : G \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1. Niech $g : G \to \mathbb{R}^{k+n}$ będzie zadane wzorem $g(x) = (x, f(x))$. Uzasadnij że $f(A)$ jest mierzalny względem k-wymiarowej miary Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy A jest mierzalny względem miary Lebesque'a.

3. Uzasadnij że jeśli V jest przestrznią wektorową nad $\mathbb{R}$ wymiaru mniejszego niż k zaś ϕ jest formą antysymetryczną na V stopnia k to $\phi = 0$. Wywnioskuj stąd że jeśli V ma dowolny wymiar zaś $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne to $\phi(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

4. Uzasadnij bezpośrednim rachunkiem że każda forma antysymetryczna ϕ stopnia 2 na $\mathbb{R}^2$ jest postaci

$$\phi((v_{1,1}, v_{1,2}), (v_{2,1}, v_{2,2})) = c \det(\{v_{i,j}\})$$

dla pewnej liczby rzeczywistej c.