

Analiza matematyczna 3B, Zadania na konwersatorium 2

1. Niech A będzie klasycznym zbiorem Cantora, tzn. $A = \bigcap_n A_n$ gdzie $A_0 = [0, 1]$ zaś $A_{n+1} = \frac{1}{3}A_n \cup (\{\frac{2}{3}\} + A_n)$. Uzasadnij że $h_k(A) = (1/2)^k$ gdzie $k = \log(2)/\log(3)$ zaś h_k jest miarą Hausdorffa wymiaru (indeksu) k .

Wskazówka: Na zbiorze Cantora istnieje naturalna miara μ taka że $\mu(A) = 1$. Konstrukcja tej miary prowadzi do nierówności $h_k(A) \leq 1$. Aby pokazać nierówność przeciwną uzasadnij że $\mu(A \cap [x, x+r]) \leq r^k$.