Analiza matematyczna 3B, Zadania na konwersatorium 4

Funkcje $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nazywamy harmoniczną jeśli $\Delta f = \sum_{i=1}^k \partial_i^2 f = 0$.

1. Uzasadnij że jeśli f jest funkcją harmoniczną to $\mathrm{div}(g\nabla f) = (\nabla g, \nabla f)$ (gdzie div oznacza dywergencję). Wywnioskuj stąd że

$$\int_{\partial A} g(\nabla f, n) = \int_A (\nabla g, \nabla f)$$

gdzie n oznacza wektor normaly do brzegu A. Jeśli dodatkowo g jest harmoniczna to

$$\int_{\partial A} g(\nabla f, n) = \int_{\partial A} f(\nabla g, n).$$

Sprawdź że dla $k > 2$ funkcja $f(x) = |x|^{2-k}$ jest harmoniczna na $\mathbb{R}^k - \{0\}$. Niech $r < R$ i $A = \{x : r \leq |x| \leq R\}$ Oblicz przy f jak wyżej

$$\lim_{r \to 0_+} \int_{\partial A} g(\nabla f, n).$$

Uzasadnij że jeśli g jest klasy C^2 i harmoniczna dla $|x| < R$ i ciągla na A to

$$g(0) = \frac{1}{c_k R^{k-1}} \int_{|x|=R} g$$

gdzie c_k jest $k-1$ wymiarową miarą sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^k$. Wywnioskuj stąd że funkcja harmoniczna nie może przyjmować maksimum we wnętrzu obszaru.

Uwaga: Zakładamy że funkcje są tak regularne jak potrzeba.