Analiza matematyczna 3B, Zadania na konwersatorium 5

1. Uzasadnij że jeśli $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, $H = \{x : f(x) = 0\}$ i $\nabla f \neq 0$ na N to ∇f jest normaly do H, czyli $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ jest jednostkowym wektorem normalym do H.

2. Uzasadnij że jeśli $B = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$, $f : B \to B$ jest ciągła i $f(x) = x$ dla x takich że $|x| = 1$ to dla każdego $y \in B$ istnieje $x \in B$ takie że $f(x) = y$.

Wskazówka: Jeśli to nie zachodzi to łatwo zbudować retrakcję z B do sfery.

3. Niech H będzie hiperpowierzchnią zwartą (bez brzegu) klasy C^k wymiaru m zawartą w $\mathbb{R}^n$, taką że istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ taki że $H \subset U$ i istnieje funkcja $r : U \to H$ klasy C^k taka że $r(x) = x$ dla $x \in H$ (taka funkcja zawsze istnieje, ale tutaj nie dowodzimy tego lecz przyjmujemy jako założenie). Niech f_0 i f_1 będą funkcjami klasy C^k z H w H. Uzasadnij że jeśli istnieje funkcja ciągła $h : [0,1] \times H \to H$ taka że $h(0,x) = f_0(x)$ zaś $h(1,x) = f_1(x)$ to również istnieje h klasy C^k o tych własnościach.

Komentarz: Funkcję h nazywamy homotopią f_0 i f_1. Powyższe można krótko przeformułować jako: istnienie ciągłej homotopii implikuje istnienie gładkiej homotopii.