Analiza matematyczna 3B, Zadania na konwersatorium 6

1. Niech x_i, $i = 1, 2, 3$ będą parami różnymi liczbami zespolonymi. Podobnie, niech y_i, $i = 1, 2, 3$ będą parami różnymi liczbami zespolonymi. Uzasadnij że istnieją zespolone a, b, c, d spełniające $ad - bc = 1$ takie że przyjmując

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

mamy $h(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Uzasadnij że jeśli dodamy do liczb zespolonych dodatkowy punkt oznaczamy ∞ z regułą $h(x) = \infty$ gdy $cx + d = 0$ i $h(\infty) = \lim_{z\to\infty} h(x)$, to wtedy h jest odwzorowaniem różnowartościowym i na z $\mathbb{C} \cup \infty$ w $\mathbb{C} \cup \infty$, Znajdź a, b, c, d takie by h odwzorowywało dysk $\{z : |z| < 1\}$ na górną półpłaszczyznę $\{z : \Im(z) > 0\}$.

Wskazówka: Potrzebne h wystarczy znaleźć w przypadku gdy $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$, $y_3 = 1$.

2. Dla ustlonego $z \in D = \{z : |z| < 1\}$ znajdź odwzorowanie $h_z : D \to D$ postaci jak wyżej, które jest na D i takie że $h_z(0) = z$. Można przy tym zażądać by dla $z \neq 0$ odwzorowanie h_z przekształcało prostą łączącą 0 i z w siebie: uzasadnij że takie h_z istnieje i jest jednoznacznie wyznaczone przez ten i poprzednie warunki. Co otrzymamy z wzoru dla funkcji harmonicznych

$$f(0) = (2\pi)^{-1} \int_{|z|=1} f(z)$$

zastosowanego do $f \circ h_z$?