Analiza matematyczna 3B, Zadania na konwersatorium 7

Niech $D = \{z : |z| < 1\}$.

1. Uzasadnij że jeśli $f : D - \{0\} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna i ograniczona to przedłuża się do funkcji holomorficznej w całym D.

Wskazówka: Rozważ $g(z) = z^2 f(z)$.

2. Uzasadnij że jeśli $f : D \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w D i $f(0) = 0$ to

$$|f'(0)| \leq \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Wskazówka: Użyj fakt że jeśli f jest holomorficzna ciągła na $\bar{D}$ to $|f|$ przyjmuje maksimum na brzegu D. Zastsosuj to i poprzednie zadanie do $f(z)/z$.

3. Uzasadnij że jeśli $f : D \to \mathbb{C}$ jest ciągła i całka z f po dowolnym trójkącie zawartym w D równa się 0 to f jest holomorficzna. Wywnioskuj stąd że jeśli f jest ciągła w D i holomorficzna dla $\Re(z) \neq 0$ to f jest holomorficzna w D.