1 Miary Hausdorffa

Najpierw definiujemy pomocnicze miary zewnętrzne $h_{k,\varepsilon}$:

$$h_{k,\varepsilon}(A) = \inf_S \sum_{B \in S} r(B)^k$$

gdzie $r(B)$ oznacza promień kuli zaś S przebiega rodziny kul otwartych takie że $A \subset \bigcup_{B \in S} B$ i $r(B) < \varepsilon$ dla dowolnego $B \in S$. Następnie:

$$h_k^*(A) = \sup_{\varepsilon > 0} h_{k,\varepsilon}(A).$$

Zuważemy że jeśli $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ to rodzina S dopuszczalnych dla ε_1 jest podzbiorem rodziny S dopuszczalnych dla ε_2, czyli $h_{k,\varepsilon_1} \geq h_{k,\varepsilon_2}$. A więc

$$h_k^*(A) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} h_{k,\varepsilon}(A).$$

Miara h_k to obcięcie h_k^* do zbiorów h_k^* mierzalnych. Miarę h_k nazywamy miarą Husdorffa.

Miary $h_{k,\varepsilon}$ zachowują się niezbyt dobrze, w szczególności trudno dla nich podać zbiory mierzalne. Natomiast każdy zbiór borelowski jest h_k mierzalny.

Bez dowodu (przy najmniej na razie) będziemy używać dwa ważne fakty:

Fakt1: Każdy zbiór borelowski jest h_k-mierzalny.

Fakt2: Jesli A jest h_k-mierzalny miary skończonej to

$$h_k(A) = \sup_{K \subset A} h_k(A)$$

gdzie supremum przebiega zbiory zwarte.

1.1 h_k na $\mathbb{R}^k$

Lemat 1.1 *Niech λ będzie miarą Lebesque'a na $\mathbb{R}^k$, $B = \{x : \|x\| = 1\}$ będzie kulą jednostkową, zaś $c = \lambda(B)$. Wtedy dla $A \subset \mathbb{R}^k$ mamy $\lambda(A) = ch_k(A)$.*

Najpierw podamy dowód oszacowania w jedną stronę:

Lemat 1.2 *Przy założeniach jak w 1.1 mamy $\lambda^* \leq ch_k^*$ gdzie λ^* oznacza miarę zewnętrzną Lebesque'a.*

Dowód: Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie dowolnym zbiorem. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\delta > 0$. Z definicji miary zewnętrznej $h_{k,\varepsilon}$ istnieje rodzina kul S taka że $A \subset \bigcup_{B \in S} B$ i

$$\sum_{B \in S} r(B)^k \leq h_{k,\varepsilon}(A) + \delta.$$

Lecz

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{B \in S} \lambda^*(B) = \sum_{B \in S} cr(B)^k$$

czyli

$$\lambda^*(A) \leq h_{k,\varepsilon}(A) + \delta.$$

Jako że $\delta > 0$ jest dowolne to

$$\lambda^*(A) \leq h_{k,\varepsilon}(A) \leq \sup_{\eta>0} h_{k,\eta}(A) = h_k^*(A).$$

$\square$

Zanim podamy dowód w drugą stronę potrzebujemy lemat geometryczny

Lemat 1.3 *(Lemat Wienera). Niech S będzie rodziną kul otwartych w $\mathbb{R}^k$ i $K \subset \bigcup_{B\in S} B$ będzie zbiorem zwartym. Dla kuli B niech B^* oznacza kulę o takim samym środku jak B i trzy razy większym promieniu. Wtedy istnieje skończona rodzina kul rozłącznych $T \subset S$ taka że $K \subset \bigcup_{B\in T} B^*$.*

Dowód. Jako że K jest zwarty to istnieje skończona rodzina kul $S_0 \subset S$ taka że $K \subset \bigcup_{B\in S_0} B$. Teraz indukcyjnie definiujemy kule B_i i skończone rodziny kul S_i. Mianowicie B_i to kula z S_i o największym promieniu (jeśli jest więcej niż jedna taka kula to wybieramy dowolnie). Rodzina S_{i+1} to rodzina tych kul z S_i które się nie przecinają z B_i. Jako że $S_{i+1} \subset S_i - \{B_i\}$ to rodziny S_i są skończone i po skończenie wielu krokach otrzymamy puste S_i co kończy konstrukcję. Niech $T = \{B_i : i = 0, \dots, n\}$ będzie otrzymaną rodziną kul i niech r_i oznacza promień B_i. Oczywiście $B_i \in S_i \subset S$, więc $T \subset S$. Jeśli $i < j$ to $B_j \in S_{i+1}$ czyli B_i jest rozłączne z B_j. Następnie, B_i^* jest kulą o takim samym środku jak B_i lecz o promieniu $3r_i$. Twierdzimy że

$$\sum_{B\in S_0} B \subset \sum_{j=0}^{n} B_j^*.$$

Mianowicie, jeśli $B \in S_0 - T$ to B przecina się z pewnym B_j. Niech i będzi najmniejszym z j takich że $B \cup B_j \neq \emptyset$. Wtedy promien B jest mniejszy lub równy od r_i. Wynika to z naszej konstrunkcji: na mocy minimalności i mamy $B \in S_i$ i gdyby promień B był większy to wybierając B_i wybralibyśmy B. Oznacza to że $B \subset B_i^*$: jeśli $z \in B$ jest dowolny, x jest środkiem B, s jest środkiem B_i zaś $y \in B \cup B_i$ to $d(y,s) < r_i$, $d(y,x) < r_i$, $d(z,x) < r_i$ czyli $d(x,s) < 3r_i$ czyli $z \in B_i^*$ czyli faktycznie $B \subset B_i^*$. Na mocy tego faktycznie

$$K \subset \sum_{B\in S_0} B \subset \sum_{j=0}^{n} B_j^*.$$

$\square$

Lemat 1.4 *Jeśli A jest zbiorem otwartym to $3^k\lambda(A)/c \geq h_k(A)$.*

Dowód: A jest sumą wstępującego ciągu zbiorów zwartych K_j. Niech $t < h_k(A)$. Wtedy istnieje j takie że $h_k(K_j) > t$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech S będzie rodziną kul o promieniu mniejszym od ε zawartych w A. Na mocy lematu Wienera 1.3 istnieje skończona rodzina kul rozłącznych $T \subset S$ taka że

$$K_j \subset \bigcup_{B\in T} B^*$$

Wtedy

$$h_{k,\varepsilon}(K_j) \leq \sum_{B\in T} r(B^*)^k = 3^k \sum_{B\in T} r(B)^k.$$

Jako że kule z T są rozłączne i zawarte w A to

$$c \sum_{B\in T} r(B)^k = \sum_{B\in T} \lambda(B) = \lambda(\bigcup_{B\in T} B) \leq \lambda(A).$$

Czyli

$$h_{k,\varepsilon}(K_j) \leq 3^k \lambda(A)/c.$$

Przechodząc z ε do granicy dostajemy

$$t < h_k(K_j) \leq 3^k \lambda(A)/c$$

Jako że $t < h_k(A)$ jest dowolne oznacza to że

$$h_k(A) \leq 3^k \lambda(A)/c$$

□

Dowód lematu 1.1: Jak już pokazaliśmy dla otwartych A mamy $\lambda(A) \leq ch_k(A) \leq 3^k\lambda(A)$. Czyli w szczególności h_k jest skończona na podzbiorach ograniczonych $\mathbb{R}^k$. Jako że h_k jest niezmiennicza na przesunięcia oznacza to że istnieje stała a taka że $a\lambda(A) = ch_k(A)$. Wiemy już że $1 \leq a \leq 3^k$. Przypuśćmy że $a > 1$. Niech U będzie zbiorem otwartym takim że $\lambda(U) = c$. Wtedy $h_k(U) = a$. Niech $K \subset U$ będzie podzbiorem zwartym takim że $\lambda(K) > c/3$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech S będzie rodziną kul o promieniu mniejszym od ε zawartych w U. Na mocy lematu Wienera istnieje rodzina kul rozłącznych $T \subset S$ taka że

$$K \subset \bigcup_{B\in T} B^*$$

co daje

$$c/3 < \lambda(K) \leq \sum_{B\in T} \lambda(B^*) = 3^k \sum_{B\in T} \lambda(B) = c3^k \sum_{B\in T} r(B)^k$$

czyli

$$3^{-k-1} < \sum_{B\in T} r(B)^k$$

Ponadto jeśli $B \in T$ to $B \subset U$. Biorąc $G = U - \sum_{B\in T} B$ mam

$$\lambda(G) = \lambda(U) - \sum_{B\in T} \lambda(B)$$

Czyli

$$h_k(G) = a\lambda(G)/c = a\lambda(U)/c - a \sum_{B\in T} r(B)^k$$

a więc

$$h_{k,\varepsilon}(U) \leq h_{k,\varepsilon}(G) + \sum_{B\in T} r(B)^k \leq h_k(G) + \sum_{B\in T} r(B)^k$$

$$= a\lambda(U)/c - a\sum_{B\in T} r(B)^k + \sum_{B\in T} r(B)^k$$
$$= a\lambda(U)/c - (a-1)\sum_{B\in T} r(B)^k$$
$$\leq a\lambda(U)/c - (a-1)3^{-k-1}$$

Przechodząc z ε do granicy dostajemy

$$h_k(U) \leq a\lambda(U)/c - (a-1)3^{-k-1} < a\lambda(U)/c$$

co daje sprzeczność z przypuszczeniem że $a > 1$. □

1.2 Jakobian

Jeśli T jest odwzorowaniem liniowym z $W = \mathbb{R}^k$ w $V = \mathbb{R}^n$ to obraz jest podprzestrzenią V wymiaru co najwyżej k. Łatwo pokazać że podprzestrzeń $U \subset V$ wymiaru mniejszego niż k ma miarę h_k zero. Wtedy dla $A \subset W$ mamy $h_k(T(A)) \leq h_k(T(W)) = 0$. Jeśli $T(W)$ ma wymiar k to wtedy $T(W)$ jest izometryczna z $\mathbb{R}^k$. Można pokazać że dla podzbiorów $A \subset \mathbb{R}^k$ obliczając $h_k(A)$ wewnątrz $\mathbb{R}^k$ dostaniemy ten sam wynik jak traktując A jako podzbiór $\mathbb{R}^n$ z $n > k$. A więc jeśli $T(W)$ jest wymiaru k to miara h_k na $T(W)$ jest wielokrotnością miary Lebesque'a na $T(W)$, w szczególności z dokładnością do mnożenia przez stałą jest jedyną miarą skończoną na obrazach przez T zbiorów ograniczonych. A więc istnieje stała c_T (zależna od T lecz niezależna od A) taka że

$$h_k(T(A)) = c_T h_k(A)$$

(obie strony zadaja miarę na W niezmienniczą na przesunięcia i taką że jest ona skończona dla zbiorów ograniczonych). Jak zauważyliśmy wyżej, jeśli $T(A)$ ma wymiar mniejszy niż k to wzór wyżej zachodzi z $c_T = 0$. A więc wzór

$$h_k(T(A)) = JTh_k(A)$$

jednoznacznie definiuje liczbę JT którą nazywamy jakobianem T.

Aby praktycznie obliczać jakobiany potrzebujemy rozkład biegunowy operatora liniowego. Najpierw przypomnę znany fakt.

Definicja: Odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy nieujemnie okreslonym jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość $(Ax, y) = (Ay, x)$ i nierówność $(Ax, x) \geq 0$.

Definicja: Odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dla $n \leq m$ nazywamy włożeniem ortogonalnym jeśli dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość $(Ax, Ax) = (x, x)$. Jeśli ponadto $n = m$ to A nazywamy odwzorowaniem ortogonalnym.

Fakt 3: O jest włożeniem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy gdy $O^T O = Id$, gdzie O^T oznacza odwzorowanie sprzeżone do O (przypominam że macierzą odwzorowania sprzeżonego jest macierz transponowana do macierzy O).

Fakt 4: Jeśli A jest odwzorowaniem nieujemnie określonym to istnieje odwzorowanie ortogonalne O i odwzorowanie D zadane macierzą diagonalną takie że $A = O^{-1}DO$. Czyli każde odwzorowaniem nieujemnie określone można zdiagonalizować przy pomocy odwzorowań ortogonalnych.

Lemat 1.5 *Jeśli A jest odwzorowaniem nieujemnie określonym to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie nieujemnie określone T takie że $A = T^2$.*

Dowód: Zauważmy że jeśli A ma postać diagonalną $Ae_i = \lambda_i e_i$ i A jest nieuejmne, to $\lambda_i \geq 0$ i λ_i ma nieujemy pierwiastek δ_i czyli $\lambda_i = \delta_i^2$. Definiując T na bazie e_i wzorem $Te_i = \delta_i e_i$ mam $T^2(e_i) = \delta_i^2 e_i = \lambda_i e_i = A_i e_i$ czyli $A = T^2$. Ogólnie, jesli $A = O^{-1}DO$, T_1 jest nieujemnie określone i $T_1^2 = D$ to biorąc $T = O^{-1}T_1O$ mam $T^2 = O^{-1}T_1OO^{-1}T_1O = O^{-1}T_1^2O = O^{-1}DO = A$ co daje istnienie T. Jeśli v jest wektorem własnym A z wartością własną λ to

$$ATv = T^2Tv = TT^2v = TAv = T\lambda v = \lambda Tv$$

czyli również Tv jest wektorem własnym A z wartością własną λ. Wiadomo że $\mathbb{R}^n$ jest sumą prostą podprzesterzeni własnych A, więc wystarczy pokazać że T jest jednoznacznie zdefiniowane na podprzesterzeniach własnych T. To jest równoważne pokazaniu że T jest jednoznacznie zdefiniowane w przypadku gdy $Ax = \lambda x$. Ale wtedy dowlna wartość własna δ operatora T spełnia $\delta^2 = \lambda$. Jako że T jest nieujemnie określony to $\delta \geq 0$, czyli δ jest wyznaczone jednoznacznie. A więc $Tx = \delta x$ i również T jest wyznaczony jednoznacznie. □

Lemat 1.6 *(O rozkładzie biegunowym) Jeśli $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem różnowartościowym to istnieje odwzorowanie nieujemnie określone T i włożenie ortogonalne O takie że $A = OT$. Ten rozkład jest jednoznaczny, tzn. zarówno T jak i O są jednoznacznie wyznaczone.*

Dowód: Najpierw pokażemy jednoznaczność T i O. Mianowicie biorąc pod uwagę że dla odzorowania nieujemnie określonego T mamy $T^T = T$ liczymy $A^TA = (OT)^TOT = T^TO^TOT = TIdT = T^2$ czyli T^2 jest wyznaczone jednonacznie. Z poprzedniego lematu również T jest wyznaczone jednoznacznie. Jako że A jest odwzorowaniem różnowartościowym również T jest różnowartościowe, czyli istnieje T^{-1}. Wtedy $O = OTT^{-1} = AT^{-1}$ czyli również O jest jednoznacznie wyznaczone. Aby pokazać istnienie bierzemy T jak wyżej, tzn. na mocy poprzedniego lematu znajdujemy nieujemnie określone T takie że $A^TA = T^2$. Jak zauważyliśmy T jest różnowartościowe i definujemy O wzorem $O = AT^{-1}$. Trzeba pokazać że O jest włożeniem ortogonalnym. Lecz $O^TO = (AT^{-1})^TAT^{-1} = T^{-1}A^TAT^{-1} = T^{-1}T^2T^{-1} = Id$ czyli O faktycznie jest włożeniem ortogonalnym. □

Lemat 1.7 *Jeśli $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ na rozkład biegunowy $A = OT$, to*

$$J(A) = \det(T) = \sqrt{\det(A^TA)}.$$

Jeśli $k = m$ to

$$J(A) = |\det(A)|.$$

Dowód. Jako że miara h_k jest niezmiennicza na izometrie, a włożenie ortogonalne jest izometrią na obraz to $J(A) = J(T)$. Zapisując $T = U^{-1}DU$

gdzie U jest odwzorowaniem ortogonalnym zaś D diagonalnym sprowadzamy problem do przypadku gdy T jest odwzorowaniem diagonalnym. Na mocy wzoru $ch_k(B) = \lambda(B)$ wiążącego k-wymiarową miarę Husdorffa na R^k i miarę Lebesque'a wystarczy pokazać że $\lambda(TB) = \det(T)\lambda(B)$ dla D będącego odwzorowaniem diagonalnym. Wiemy że $\lambda(TB) = c\lambda(B)$ i tylko musimy sprawdzić że $c = \det(T)$. Dla B będącego produktem odcinków jednostkowych, tzn. $B = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ mamy $TB = [0,\delta_1] \times \cdots \times [0,\delta_k]$ gdzie $Te_i = \delta_i e_i$ i

$$\lambda(TB) = \prod_{i=1}^{k} \delta_i = \det(T) = \det(T)\lambda(B)$$

czyli faktycznie $c = \det(T)$. Następnie, $T^2 = A^T A$ czyli $\det(T)^2 = \det(A^T A)$ czyli $J(A) = \sqrt{\det(A^T A)}$. Wreszcie jeśli $k = n$ to $|\det(A)| = \sqrt{\det(A^T A)}$. $\square$

1.3 Miara powierzchniowa

Miara Hausdorffa h_k jest naturalną k wymiarową miarą na podzbiorach $\mathbb{R}^n$. Jednakże by uzyskać zgodność z miarą Lebesque'a na $\mathbb{R}^k$ wygodnie jest przenormować miarę h_k. Miarę ch_k na $\mathbb{R}^n$ gdzie c jest miarą Lebesque'a kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^k$ nazywamy miarą powierzchniową. Jak pokażemy w ważnym przypadku szczególnym gdy zbiór B jest obrazem dostatecznie porządnej funkcji można podać wzory na oblicznie miary powierzchniowej.

2 Lemat o zamianie zmiennych

Warunek Stepanowa. Niech $A \subset \mathbb{R}^k$. Powiemy że funkcja $f : A \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Stepanowa w punkcie $x \in A$ jeśli

$$\lim \sup_{y \in A, y \neq x} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} < \infty.$$

Powiemy że f spełnia warunek Stepanowa na A jeśli f spełnia warunek Stepanowa w punkcie x dla każdego $x \in A$.

Uwaga: Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x to f spełnia warunek Stepanowa w punkcie x. Jeśli f spełnia warunek Lipschitza na A (z pewną stałą) to f spełnia warunek Stepanowa na A.

Fakt: Jeśli f spełnia warunek Stepanowa na zbiorze otwartym A to f jest różniczkowalna dla p.w $x \in A$.

Uwaga: Pochodną $f'(x)$ zdefiniowaliśmy tylko wtedy gdy f jest okreslona w pewnym otoczeniu x. Aby mówić o pochodnej musimy więc zakładać że f jest zdefiniowana na dostatecznie dużym zbiorze. Jednakże faktycznie używamy tylko jej własności na A, tak że w lemacie niżej moglibyśmy zdefiniować pochodną pomijając warunek że f jest zdefiniowan w pewnym otoczeniu x. Wtedy stracilibyśmy jednoznaczność pochodnej, tzn. potencjalnie mielibyśmy wiele możliwych pochodnych i trzeba by wybrać jedną. Można pokazać że wyniki niżej zachowują się przy takim uogólnieniu pochodnej, więc nie będziemy niżej jawnie dodawać założenia że f jest zdefiniowana w otoczeniu x — przy odpowiedniej definicji pochodnej jest ono niepotrzebne.

Notacja: Jeśli $f : A \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w punkcie x to przez $Jf(x)$ rozumiemy $J(f'(x))$.

Lemat 2.1 *Wzór zamiany zmiennych dla mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^k$. Jeśli f spełnia warunek Stepanowa na A i f jest różniczkowalna dla p.w. $x \in A$ zaś u jest mierzalna to*

$$\int_A u(x)Jf(x)dh_k(x) = \int \sum_{x:f(x)=y} u(x)dh_k(y)$$

gdzie równość zachodzi bezwarunkowo dla nieujemnych u, zaś ogólnie jeśli lewa strona jest całkowalna to prawa strona jest całkowalna i zachodzi równość.

Lemat 2.2 *Jeśli $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ dla $x, y \in A$ to $h_k^*(f(A)) \leq M^k h_k^*(A)$. Ponadto jeśli A jest h_k-mierzalny i $h_k(A) < \infty$ to $f(A)$ jest h_k-mierzalny.*

Dowód: Dla kuli otwartej B o środku w punkcie x i promieniu r oznaczamy przez $\tilde{f}(B)$ kulę o środku w punkcie $f(x)$ i promieniu Mr. Z założenia, jeśli $\|y-x\| < r$ to $\|f(y)-f(x)\| < Mr$, czyli $y \in \tilde{f}(B)$. Innymi słowy $f(B) \subset \tilde{f}(B)$.

Jeśli S jest rodziną kul taką że $A \subset \bigcup_{B \in S} B$, to mamy

$$f(A) \subset \bigcup_{B \in S} f(B) \subset \bigcup_{B \in S} \tilde{f}(B) = \bigcup_{B \in \tilde{f}(S)} B$$

gdzie $\tilde{f}(S) = \{\tilde{f}(B) : B \in S\}$. Następnie, jeśli dla $B \in S$ zachodzi $r(B) < \varepsilon$ to $r(\tilde{f}(B)) < M\varepsilon$ i

$$h_{k,M\varepsilon}(f(A)) \leq \sum_{B \in \tilde{f}(S)} r(B)^k = \sum_{B \in S} r(\tilde{f}(B))^k = \sum_{B \in S} (Mr(B))^k = M^k \sum_{B \in S} r(B)^k.$$

Biorąc infimum po prawej stronie mamy

$$h_{k,M\varepsilon}(f(A)) \leq M^k h_{k,\varepsilon}(A).$$

Przechodząc z ε do granicy dostajemy

$$h_k^*(f(A)) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} h_{k,\varepsilon}(f(A)) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} h_{k,M\varepsilon}(f(A))$$

$$\leq M^k \lim_{\varepsilon \to 0_+} h_{k,\varepsilon}(A) = M^k h_k^*(A).$$

Jeśli A jest h_k mierzalny i skończonej miary, to istnieje ciąg zbiorów zwartych $K_j \subset A$ takich że $h_k(A) = \sup_j h_k(K_j)$. Wtedy dla $Z = A - \bigcup_j K_j$ mamy

$$h_k(Z) \leq \inf_j h_k(A - K_j) = h_k(A) - \sup_j k(K_j) = 0$$

a więc $h_k(f(Z)) = 0$, czyli Z jest miary zero czyli h_k-mierzalny. Jako że f jest ciągła to $f(K_j)$ jest zwarty, a więc h_k-mierzalny. Czyli $f(A) = f(Z) \cup \bigcup_j f(K_j)$ jest h_k-mierzalny jako przeliczalna suma zbiorów h_k-mierzalnych. $\square$

Lemat 2.3 *Jeśli $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym, $JS > 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, takie że jeśli A jest h_k mierzalny, $h_k(A) < \infty$, dla dowolnych $x, y \in A$*

$$\|f(x) - f(y) - S(x-y)\| \leq \delta \|x-y\|$$

to

$$(1-\varepsilon) JSh_k(A) \leq h_k(f(A)) \leq (1+\varepsilon) JSh_k(A).$$

W szczególności wtedy $f(A)$ jest h_k-mierzalny. Ponadto, jeśli T jest operatorem liniowym takim że $\|T - S\| \leq \delta$ to

$$(1-\varepsilon) JS \leq JT \leq (1+\varepsilon) JT.$$

Dowód. Jeśli S jest izometrycznym włożeniem to $JS = 1$ i nieróweość

$$h_k(f(A)) \leq (1+\varepsilon) JSh_k(A)$$

wynika z 2.2. Mianowicie $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x-y\|$ z $M = 1+\delta$, czyli wystarczy $(1+\delta)^k \leq 1+\varepsilon$. Przy tym z 2.2 wynika też że $f(A)$ jest h_k mierzalny. Aby pokazać drugą nierówność zauważmy że

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|S(x-y)\| - \delta\|x-y\| = (1-\delta)\|x-y\|.$$

A więc f jest różnowartościowa, i odwrotność $f^{-1} : f(A) \to A$ spełnia $\|x-y\| \geq (1-\delta)\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|$, czyli

$$\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{1-\delta}\|x-y\|.$$

Więc na mocy 2.2

$$JSh_k(A) = h_k(A) = h_k(f^{-1}(f(A))) \leq \frac{1}{(1-\delta)^k} h_k(f(A))$$

czyli

$$(1-\varepsilon) JSh_k(A) \leq h_k(f(A))$$

o ile $(1-\varepsilon) \leq (1-\delta)^k$. Czyli lemat zachodzi dla S będącego izometrycznym włożeniem. Ogólne S z $JS > 0$ można zapisać w postaci $A = UDV$ gdzie D jest diagonalne z dodatnimi wartościami na diagonali, U jest izometrycznym włożeniem zaś V jest izometrią. Ponieważ izometria nie zmienia ani miary ani normy zastępując f przez $f \circ V^{-1}$ i A przez VA można pominąć V bez utraty ogólności. Następnie stosując już udowodnioną część lematu do $g = f \circ D^{-1}$, U i DA znajdujemy δ_1 takie że o ile

$$\|g(x) - g(y) - U(x-y)\| \leq \delta_1\|x-y\|$$

to

$$(1-\varepsilon) h_k(DA) \leq h_k(g(DA)) \leq (1+\varepsilon) h_k(DA).$$

Lecz $h_k(DA) = JDh_k(A) = JSh_k(A)$, zaś $g(DA) = f(A)$ czyli powyższe oznacza

$$(1-\varepsilon) JSh_k(A) \leq h_k(f(A)) \leq (1+\varepsilon) JSh_k(A).$$

Czyli wystarczy dobrać δ tak by warunek na g był spełniony. Lecz $g = f \circ D^{-1}$ czyli

$$\|g(x) - g(y) - U(x-y)\| = \|f(D^{-1}x) - f(D^{-1}y) - UD(D^{-1}x - D^{-1}y)\|$$

$$= \|f(D^{-1}x) - f(D^{-1}y) - S(D^{-1}x - D^{-1}y)\| \leq \delta \|D^{-1}x - D^{-1}y\| \leq \delta \|D^{-1}\| \|x-y\|.$$

Czyli wynik zachodzi o ile $\delta \|D^{-1}\| \leq \delta_1$. Ostatnia część wynika z definicji jakobianu po zastosowaniu poprzedniej części do $f(x) = Tx$. □

Lemat 2.4 *Jeśli $\|f'(x) - S\| \leq \delta$ na A, to istnieje przeliczalny ciąg rozłącznych zbiorów mierzalnych i ograniczonych A_k taki że $A = \bigcup A_k$ i $\|f(x) - f(y) - S(x-y)\| \leq 2\delta \|x - y\|$ dla $x, y \in A_k$.*

D. Niech $\phi(x,y) = \|f(x) - f(y) - S(x-y)\| / \|x-y\|$ dla $x \neq y$ i niech

$$B_k = \{x : \phi(x,y) < 2\delta \quad \text{dla każdego } y \neq x \text{ takiego że } \|x-y\| < 1/k\}$$

Z założenia mamy

$$\limsup_{y \to x} \phi(x,y) \leq \delta$$

więc $A = \bigcup B_k$. Z założenia f jest różniczkowalna na A, a więc ciągła na A, a więc mierzalna, czyli B_k są mierzalna. Następnie rozbijamy mierzalnie każde z B_k na zbiory o średnicy $< 1/k$, otrzymując zbiory $C_{k,m}$ take że $B_k = \bigcup_m C_{k,m}$ i dla dowolnego k, m i $x, y \in C_k, m$ mamy $\|x - y\| < 1/k$. Wtedy

$$\|f(x) - f(y) - S(x-y)\| = \|x-y\| \phi(x,y) < 2\delta \|x-y\|$$

dla $x, y \in C_{k.m}$. Oczywiście $C_{k,m}$ są ograniczone, więc przenumerowując i urozłączniając $C_{k.m}$ dostaniemy A_k. □

Lemat 2.5 *Niech U będzie zbiorem operatorów liniowych z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$ takich że $JS > 0$ dla $S \in U$. Jeśli $\delta : U \to (0, \infty)$, i $Jf(x) > 0$ dla $x \in A$, to istnieje ciąg operatorów $S_k \in U$ i ciąg rozłącznych zbiorów mierzalnych i ograniczonych A_k takich że $\|f(x) - f(y) - S_k(x-y)\| \leq \delta(S_k)\|x-y\|$ dla $x, y \in A_k$.*

Dowód. Dla $S \in U$ niech $V_T = \{S : \|S - T\| < \delta(T)/2\}$. Ponieważ U jest przestrzenią metryczną ośrodkową to istnieje ciąg operatorów liniowych T_l taki że

$$U = \bigcup_l V_{T_l}.$$

Niech $B_l = \{x \in A : f'(x) \in V_{T_l}\}$. B_l są rozłączne, mamy $A = \bigcup_k B_l$ i

$$\|f'(x) - T_l\| < \delta(T_l)/2$$

dla $x \in B_l$. Na mocy lematu 2.4 istnieją zbiory rozłączne $C_{l,j}$ takie że $B_l = \bigcup_j C_{l,j}$ i

$$\|f(y) - f(x) - T_l(y-x)\| < \delta(T_l)\|y-x\|$$

dla $y, x \in C_{l,j}$. Niech k numeruje pary (l, j). Biorąc $S_k = T_{l_k}$ i $A_k = C_{l_k, j_k}$ dostajemy żądane S_k i A_k. □

Lemat 2.6 *Jeśli A jest mierzalny, $Jf(x) > 0$ dla $x \in A$, to*

$$\int_A Jf(x)dh_k(x) = \int_{f(A)} \sum_{x\in A: f(x)=y} 1dh_k(y).$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech U będzie jak w lemacie 2.5. Dla $S \in U$ niech $\delta(S)$ będzie taką by teza lematu 2.3 zachodziła dla S, ϵ i $\delta(S)$. Na mocy lematu 2.5 istnieją rozłączne zbiory mierzalne i ograniczone A_j i operatory S_j takie że $A = \bigcup_j A_j$ i

$$\|f(x) - f(y) - S_j(x-y)\| \leq \delta(S_j)\|x-y\|$$

dla $x, y \in A_j$. Ponieważ $A_j \subset \mathbb{R}^k$ są ograniczone to $h_k(A_j) < \infty$. Dla każdego A_j z osobna możemy stosować lemat 2.3. W szczególności oznacza to że $f(A_j)$ jest mierzalny. Następnie, dla $x \in A_j$ mamy

$$\|f'(x) - S_j\| < \delta$$

czyli z drugiej części 2.3 wynika że

$$(1-\varepsilon)JS_j \leq (Jf)(x) \leq (1+\varepsilon)JS_j$$

dla $x \in A_j$. Razem z pierwszą częścią 2.3 daje to

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1}\int_{A_j} Jf(x)dh_k(x) \leq (1-\varepsilon)\int_{A_j} JSdh_k(x) = (1-\varepsilon)JSh_k(A_j) \leq$$

$$h_k(f(A_j)) = \int_{f(A_j)} 1dh_k(y).$$

Podobnie

$$\int_{f(A_j)} 1dh_k(y) \leq (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}\int_{A_j} Jf(x)dh_k(x).$$

Sumując po j widzimy że $f(A) = \bigcup_j f(A_j)$ jest mierzalny i

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1}\int_A Jf(x)dh_k(x) \leq \int_{f(A)} \sum_{x\in A: f(x)=y} 1dh_k(y)$$

$$\leq (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}\int_A Jf(x)dh_k(x).$$

Jako że $\varepsilon > 0$ jest dowolne oznacza to że

$$\int_A Jf(x)dh_k(x) \leq \int_{f(A)} \sum_{x\in A: f(x)=y} 1dh_k(y) \leq \int_A Jf(x)dh_k(x)$$

co daje wynik. $\square$

Lemat 2.7 *Jeśli f spełnia warunek Stepanowa na A to istnieją zbiory rozłączne A_k takie że f spełnia warunek Lipschitza na A_k.*

Dowód. Podobny do lematu 2.4. Niech $\phi(x,y) = \|f(x) - f(y)\|/\|x-y\|$ dla $x \neq y$ i niech

$$B_{k,l} = \{x : \phi(x,y) < l \quad \text{dla każdego } y \neq x \text{ takiego że } \|x-y\| < 1/k\}.$$

Z założenia mamy

$$\limsup_{y \to x} \phi(x,y) < \infty$$

więc $A = \bigcup B_{k,l}$. Następnie rozbijamy mierzalnie każde z $B_{k,l}$ na zbiory o średnicy $< 1/k$, otrzymując zbiory $C_{k,l,m}$ take że $B_{k,l} = \bigcup_m C_{k,l,m}$ i dla dowolnego k, l, m i $x, y \in C_{k,l,m}$ mamy $\|x - y\| < 1/k$. Wtedy

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|\phi(x,y) < l\|x-y\|$$

czyli na $C_{k,l,m}$ funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stała l. Przenumerowując i urozłączniając $C_{k,l,m}$ otrzymujemy A_k. □

Lemat 2.8 *Jeśli f spełnia warunek Stepanowa na A i $h_k(A) = 0$ to $h_k(F(A)) = 0$.*

Dowód. Na mocy lematu 2.7 istnieje ciąg zbiorów A_j taki że $A = \bigcup_j A_k$ i f spełnia warunek Lipschitza na A_j. Na mocy lematu 2.2 mamy

$$h_k(f(A_j)) \leq M^k h_k(A_j) \leq M^k h_k(A) = 0$$

gdzie M jest stałą Lipschitza f na A_j. A więc

$$h_k(f(A)) \leq \sum_j h_k(f(A_j)) = 0.$$

□

Lemat 2.9 *Niech* $B = \{x \in A : \operatorname{rank}(f'(x)) < k\}$. *Wtedy* $h_k(f(B)) = 0$.

Dowód: Niech pomocnicza funkcja $F_\varepsilon : A \to \mathbb{R}^{n+k}$ będzie zadana wzorem $F_\varepsilon(x) = (f(x), \varepsilon x)$. Mamy

$$f(x) = P \circ F_\varepsilon$$

gdzie P oznacza rzutowanie ortogonalne z $\mathbb{R}^{n+k}$ na $\mathbb{R}^n$. Oczywiście $F'_\varepsilon(x)$ jest różnowartościowe dla każdego x takiego że f jest różniczkowalna w x, a więc $JF_\varepsilon(x) > 0$ na B. Na mocy lematu 2.6

$$\int_B JF_\varepsilon(x) dh_k(x) = \int_{F_\varepsilon(B)} \sum_{x : F_\varepsilon(x) = y} 1 dh_k(y) \geq h_k(F_\varepsilon(B)).$$

Na mocy lematu 2.2 jako że stała Lipschitza dla P to 1 mamy

$$h_k(P(F_\varepsilon(B)) \leq h_k(F_\varepsilon(B))$$

czyli

$$
\begin{aligned}
h_k(f(B)) &= h_k(P \circ F_\varepsilon(B)) = h_k(P(F_\varepsilon(B)) \\
&\leq h_k(F_\varepsilon(B)) \leq \int_B JF_\varepsilon(x) dh_k(x).
\end{aligned}
$$

Więc

$$h_k(f(B)) \leq \int_B JF_\varepsilon(x) dh_k(x)$$

Mamy $JF_\varepsilon(x) \to Jf(x)$ gdy $\varepsilon \to 0$. Jeśli A ma miarę skończoną i $f'(x)$ jest ograniczone na A to $JF_\varepsilon(x)$ są wspólnie ograniczone z góry przez funkcję całkowalną (tzn. stałą) na A, a więc na mocy twierdzenia Lebesque'a o ograniczonej zbieżności mamy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_B JF_\varepsilon(x) dh_k(x) \to 0$$

czyli $h_k(f(B)) = 0$. W ogólnym przypadku przedstawiamy B jako sumę zbiorów B_j o mierze skończonej takich że $f'(x)$ jest ograniczone na B_j. Wtedy

$$h_k(f(B)) \leq \sum_j h_k(f(B_j)) = 0$$

□

Dowód lematu 2.1: Zauważmy że lemat wystarczy pokazać w przypadku gdy f jest różniczkowana i $Jf > 0$. Mianowicie jeśli pokażemy ten przypadek to biorąc $B = \{x \in A : Jf(x) = 0\}$ zaś jako Z zbiór tych $x \in A$ że f nie jest różniczkowalna w x na mocy lematów 2.8 i 2.9 mamy $h_k(f(Z)) = 0$, $h_k(f(B)) = 0$ zaś dla $A - Z - B$ mamy

$$\int_{A-Z-B} u(x) Jf(x) dh_k(x) = \int_{f(A-Z-B)} \sum_{x \in A-Z-B : f(x)=y} u(x) dh_k(y)$$

czyli uwzględniając powyższe po lewej stronie możemy całkować po $A - Z$ i

$$
\begin{aligned}
\int_A u(x) Jf(x) dh_k(x) &= \int_B u(x) Jf(x) dh_k(x) + \int_{A-Z-B} u(x) Jf(x) dh_k(x) \\
&= \int_B 0 + \int_{A-Z-B} u(x) Jf(x) dh_k(x) = \int_{A-Z-B} u(x) Jf(x) dh_k(x) \\
&= \int_{f(A-Z-B)} \sum_{x \in A-Z-B : f(x)=y} u(x) dh_k(y) \\
&\int_{f(A)} \sum_{x \in A : f(x)=y} u(x) dh_k(y)
\end{aligned}
$$

gdzie ostatnia równość wynika z tego że $h_k(f(Z)) = h_k(f(B)) = 0$. A więc możemy zakładać że $Jf(x) > 0$ na A. Jeśli u jest funkcją wskaźnikową zbioru $F \subset A$, tzn. $u(x) = 1$ dla $x \in F$ i $u(x) = 0$ dla $x \notin F$ to równość

$$\int_A u(x) Jf(x) dh_k(x) = \int_{f(A)} \sum_{x \in A : f(x)=y} u(x) dh_k(y)$$

wynika z lematu 2.6. Ze względu na liniowość całki wynik zachowuje się dla funkcji prostych. Nieujemne u jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych, a więc na mocy lematu o zbieżności monotonicznej wynik zachowuje się dla takich u. Jeśli lewa strona jest całkowalna to można napisać $u(x) = u_+(x) - u_-(x)$ gdzie u_+ i u_- są nieujemne i całki $\int_A u_+(x)Jf(x)dh_k(x)$ i $\int_A u_-(x)Jf(x)dh_k(x)$ są skończone. Wtedy

$$\int_A u_+(x)Jf(x)dh_k(x) = \int_{f(A)} \sum_{x\in A:f(x)=y} u_+(x)dh_k(y),$$

$$\int_A u_-(x)Jf(x)dh_k(x) = \int_{f(A)} \sum_{x\in A:f(x)=y} u_-(x)dh_k(y),$$

i z liniowości całki

$$\int_A u(x)Jf(x)dh_k(x) = \int_A u_+(x)Jf(x)dh_k(x) + \int_A u_-(x)Jf(x)dh_k(x)$$

$$= \int_{f(A)} \sum_{x\in A:f(x)=y} u_+(x)dh_k(y) + \int_{f(A)} \sum_{x\in A:f(x)=y} u_-(x)dh_k(y)$$

$$\int_{f(A)} \sum_{x\in A:f(x)=y} u(x)dh_k(y).$$

□