1. Wyznaczyć prawostronnie niezmiennicze pola wektorowe dla przykładowych grup z wykładu (tzn. grup Heisenberga, “ax+b”, $SO(3)$, $SL(2, R)$ i izometrii płaszczyzny). Wybrać sobie bazę i obliczyć odpowiedni operator $L = \sum X_i^2$ gdzie X_i są elementami bazy.

2 Sprawdzić że jeśli X jest prawostronnie niezmienniczym polem wektorowych an grupie Liego G, to X wyznacza operator antysymetryczny na $L^2(G)$ względzem lewostronnie niezmienniczej miary Haara, tzn

$$\langle Xf, g\rangle = -\langle f, Xg\rangle$$

dla dowolnych $f, g \in C_c^\infty(G)$.

3. Pokazać że jeśli K jest zwartym otoczeniem 0 w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$ to $|K^n|/n^d$ dąży do miary powłoki wypukłej K.

Uwaga: podobny wynik zachodzi dla grup nilpotentnych.

4. Grupę “ax+b” utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$ z działaniem:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2}y_1 + y_2)$$

Niech $K = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Jak wygląda $K \cdot (t, 0)$? Wywniskować stąd że “ax+b” ma wzrost wykładniczy.