1. Niech $H = -\partial_x^2 + x^2$ będzie operatorem Hermita. Pokazać że

$$\|\partial_x^{2k} f\|_{L^p} \leq \|H^k f\|_{L^p}$$

Wskazówka: Wywnioskować to z odpowiedniej nierówności na grupie Heisenberga.

2. Niech X, Y, Z będą przestrzeniami z miarą, $1 \leq p \leq \infty$ i niech $\phi : X \mapsto L^q(Z)$, $\psi : Y \mapsto L^p(Z)$ gdzie $1/p + 1/q = 1$ będą odwzorowaniami mierzalnymi. Niech

$$(Tf)(x) = \int_{y \in Y} K(x, y) f(y) dy$$

$$(Sf)(x) = \int_{y \in Y} K(x, y) \langle \phi(x), \psi(y) \rangle f(y) dy$$

gdzie K jest mierzalne i ograniczone. Pokazać że

$$\|S\|_{L^p(Y) \to L^p(X)} \leq \sup_{x \in X} \|\phi(x)\|_{L^q(Z)} \sup_{y \in Y} \|\psi(y)\|_{L^p(Z)} \|T\|_{L^p(Y) \to L^p(X)}$$

Zauważyć że wynik ten pozostaje w mocy gdy ϕ i ψ przyjmują wartości w L^2, tzn

$$\|S\|_{L^p(Y) \to L^p(X)} \leq \sup_{x \in X} \|\phi(x)\|_{L^2(X)} \sup_{y \in Y} \|\psi(y)\|_{L^2(Z)} \|T\|_{L^p(Y) \to L^p(X)}.$$

Wskazówka1: Najpierw pokazać że $T \otimes I$ z $L^p(Y \times Z)$ do $L^p(X \times Z)$ ma tą samą normę co T.

Wskazówka2: L^2 można izometrycznie zanurzyć w L^p dla $1 \leq p \leq \infty$.

3. Niech G będzie grupą unimodularną, $\phi = g * g^*$ z $g \in L^2(G)$, zaś $K \in L^r(G)$, $1 \leq 1 \leq \infty$. Niech

$$Tf = K * f$$

$$Sf = (\phi K) * f$$

Pokazać że

$$\|S\|_{L^p(G) \to L^p(G)} \leq \|g\|_{L^2(G)}^2 \|T\|_{L^p(G) \to L^p(G)}$$

Wskazówka: Użyć poprzednie zadanie.

4. Grupę G nazywany grupą ze średnią jeśli istnieje ciąg funkcji g_n taki że g_n na nośnik zwarty, $\|g_n\|_{L^2} = 1$, $\lim g_n * (g_n)^* = 1$ jednostajnie na podzbiorach zwartych G. Pokazać że jeśli G jest grupą ze średnią zaś T jest operatorem ograniczonym na $L^p(G)$ komutującym z prawymi przesunięciami to istnieje ciąg funkcji $K_n \in L^1(G)$ taki że dla

$$T_n f = K_n * f$$

zachodzi

$$\|T_n\| L^p(G) \to L^p(G) \leq \|T\|_{L^p(G) \to L^p(G)}$$

$$T_n \to T$$

w topologii mocnej zbieżności operatorów. Ponadto, jeśli $T \in C^*(G)$ to T_n zbiega do T w $C^*(G)$.