1. Niech L będzie dodatnio określonym generatorem półgrupy miar z gęstościami w $L^2(G)$ (G jest grupą Liego). Pokazać że istnieje miara μ na półprostej, taka że dla $F \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ operator $F(L)$ (a priori zdefiniowany przy pomocy twierdzenia spektralnego) jest postaci

$$F(L)f = K_F * f$$

przy tym $\|K_F\|_{L^2(G)} = \|F\|_{L^2(\mu)}$.

2. Niech L będzie dodatnio określonym podlaplasianem, V domknieciem podprzestrzeni rozpietej przez jądro ciepła w przestrzeni dystrybucji, zaś μ miarą z zadania 1. Pokazać że dla λ ze spektrum L istnieją funkcje gładkie $\phi_\lambda \in V$ take że $L\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$. Ponadto dla $F \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ zachodzi

$$K_F = \int F(\lambda)\phi_\lambda d\mu(\lambda)$$

oraz

$$F(\lambda) = \int_G K_F(x)\phi_\lambda(x)dx$$

3. Przypominam że dla grupy G z mnożeniem zadanym wzorem

$$(s_1, x_1, y_1)(s_2, x_2, y_2) = (s_1 + s_2, \exp(s_2)x_1, x_2, \exp(s_2)y_1 + y_2)$$

odległość od zera jest zadana wzorem $r = \operatorname{arc\,cosh}((\exp(s) + \exp(-s)(1 + x^2 + y^2))/2)$, zaś jądro ciepła wzorami:

$$\phi_0 = \exp(-s)\frac{r}{\sinh(r)},$$

$$p_t = cT^{-3/2}\phi_0 \exp(-r^2/(4t)).$$

Sprawdzić że $\lim t\|SXp_t\|_{L^1} = \infty$ dla $t \to \infty$.

4. Niech G będzie grupą ze zwartą podgrupą K. Pokazać że funkcje całkowalne dwustronnie K niezmiennicze tworzą algebrę ze względu na splot. Zakładamy że dla dowolnego x zachodzi $x^{-1} \in KxK$. Pokazać że wtedy splot funkcji dwustronnie K niezmienniczych jest przemienny. Ponadto funkcjonały multyplikatywne na algebrze ciągłych funkcji dwustronnie K niezmienniczych o nośniku zwartym są wyznaczone przez całkowanie z ciągłą funkcją dwustronnie K niezmienniczą (funkcje wyznaczające funkcjonały multyplikatywne nazywami funkcjami sferycznymi). Jeśli L jest dwustronnie K niezmienniczym laplasianem to funkcje sferyczne są funkcjami własnymi L i są gładkie.

5. Niech G będzie grupą macierzy zespolonych 2 na 2 o wyznaczniku 1, zaś $K \subset G$ (pod)grupą macierzy unitarnych. Pokazać że para (G, K) spełnia warunek $x^{-1} \in KxK$ z poprzedniego zadania. Niech $A \subset G$ będzie podgrupą macierzy diagonalnych z rzeczywitymi, dodatatnimi elementami na diagonali. Pokazać że funkcja dwustronnie K niezmiennicza jest wyznaczona jednoznacznie przez obcięcie do A. Wyznaczyć działanie laplasianu na funkcjach dwustronnie K niezmienniczych w terminach ich obcięcia do A.