Funkcję modularną $m$ definujemy wzorem:

$$\int_G f(xg)dx = m(g) \int_G f(x)dx$$

gdzie całkowanie jest względem lewostronnie niezmienniczej miary Haara.

**1**. Pokazać że $m(x)dx$ jest prawostronnie niezmienniczą miarą Haara.

**2**. Na miarach zespolonych definujemy inwolucję $^*$ wzorem $\mu^*(A) = \overline{\mu(A^{-1})}$, gdzie $A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}$. Podobnie, na dystrybucjach definiujemy inwolucję wzorem $\langle \mu^*, \phi \rangle = \overline{\langle \mu, \check{\phi} \rangle}$ gdzie $\check{\phi}(x) = \phi(x^{-1})$. Pokazać że dystrybucyjna definicja rozszerza tę dla miar, na funkcjach obie prowadzą do wzoru $f^*(x) = m(x)\overline{f(x^{-1})}$. Ponadto $(\mu_1 * \mu_2)^* = \mu_2^* * \mu_1^*$.

**3** Pokazać że

$$\|f * g\|_{L^r(G)} \leq \|f\|_{L^p(G)} \|m^s g\|_{L^q(G)}$$

gdzie $1/r = 1/p + 1/q - 1$, $s = 1 - 1/p$.

**4** Pokazać że jeśli $f$ jest klasy $C^\infty$ z lewej strony, tzn. kolejne nakładanie dowolnych prawostronnie niezmienniczych pól wektorowych na $f$ daje funkcje ciągłe, to $f$ jest $C^\infty$ z prawej strony, tzn. kolejne nakładanie dowolnych lewostronnie niezmienniczych pól wektorowych na $f$ daje funkcje ciągłe. Oba te warunki są równoważne temu że $f$ jest $C^\infty$ jako funkcja na rozmaitości.

Krzywą $\gamma$, Lipschitzowską względem pewnej metryki Riemmana na $G$, nazywamy geodetyką dla metryki sterowania optymalnego jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie że $d(\gamma(t), \gamma(s)) = t - s$ dla $\epsilon > t - s > 0$.

**5**. Pokazać że jeśli $\gamma$ jest krzywą w trójwymiarowej grupie Heisenberga, której rzut na płaszczyznę $x, y$ jest krzywą zamkniętą to przyrost współrzędnej $z$ jest proporcjonalny do pola ograniconego przez rzut $\gamma$ na płaszczyznę $x, y$. Wywnioskować stąd że geodetyki na grupie Heisenberga mają rzut na płaszczyznę $x, y$ który albo jest prostą, albo łukiem okręgu.