1. Grupę "ax+b" utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$ z działaniem:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2} y_1 + y_2)$$

Niech $X = \partial_x$, $Y = e^x \partial_y$. Rozważamy metrykę sterowania optymalnego d związaną z polami X i Y. Pokazać że jesli $\gamma : [0, t] \mapsto G$ jest taka że najpierw poruszamy się w kierunku pola $X + Y$ zaś później w kierunku pola $-X + Y$ to przyrost y wzdłóż γ jest większy niż przyrost y wzdłóż dowolnej krzywej dopuszczalnej o długości t i tej samej co γ wartości x na końcu (oczywiście γ ma długość większą niż t).

Niech $h(x, y) = \max(|x|, -x + 2\log(|y|))$. Bez obliczania d (jest jawny wzór) pokazać że

$$h(x, y/2) \leq d((x, y), 0) \leq h(x, y) + 1$$

.

Wskazówka: γ daje oszacowanie z dołu. Prosta modyfikacja γ daje oszacowanie z góry.

2. Pokazać że jeśli $\omega \geq 0$ jest podaddytywna, $0 < a \leq 1$ to ω^a też jest podaddytywna. Podobnie, jeśli $b > 0$, to $(1 + \omega)^b$ jest podmultyplikatywna.

3. Dla $1 \leq p < \infty$ definujemy $\|f\|_{L^p(\omega)} = \|\omega^{1/p} f\|_{L^p}$ zaś $L^p(\omega)$ to zbiór funkcji dla których ta norma jest skończona. Pokazać że jeśli L^p jest względem lewostronnej miary Haara i ω jest podmultyplikatywna to

$$\|f * g\|_{L^p(\omega^p)} \leq \|f\|_{L^1(\omega)} \|g\|_{L^p(\omega^p)}$$

4 Zakładamy że $\phi_n \geq 0$, $\int \phi_n = 1$ i że dla każdego otoczenia jedynki U zachodzi $\lim_{n \to \infty} \int_{G-U} \phi_n = 0$. Ponadto niech $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$. Pokazać że wtedy $\phi_n * f \to f$ w $L^p(G)$. Jeśli założymy że dla każdego otoczenia jedynki U dla dużych n zachodzi $\phi_n(x) = 0$ dla $x \notin U$ to dodatkowo $f * \phi_n \to f$.

5 Zakładamy że h jest funkcją podaddytywną, $K \subset \{x : |h(x)| \leq 1\}$, $K = K^{-1}$, Pokazać że jeśli $\phi \geq 0$, $\int \phi = 1$, $\phi(x) = 0$ dla $x \notin K$, to $|\phi * h - h| \leq 1$. Jeśli zamiast tego założymy że $\int |\phi| = 1$, $\int \phi = 0$, $\phi(x) = 0$ dla $x \notin K$, to $|\phi * h| \leq 1$.

6 Niech X bedzie prawostronnie niezmienniczym polem wektorowym na G, zaś $1 \leq p < \infty$. Zakładamy że f jest dystrybucją na G taką że $f \in L^p(G)$ i $Xf \in L^p(G)$, gdzie na razie Xf jest zdefinowane jako pochodna dystrybucyjna. Pokazać że istnieje ciąg f_n funkcji gładkich o nośnikach zwartych, taki że $f_n \to f$ i $Xf_n \to Xf$ w $L^p(G)$. Innymi słowy, jeśli za dziedzinę X na $L^p(G)$ przyjmiemy zbiór f jak wyżej, to X jest domknięciem swojego ograniczenia do funkcji gładkich o nośnikach zwartych.

Wskazówka: Najpierw przy pomocy zadania 2 zbudować ciąg g_n funkcji gładkich, ale bez zwartego nośnika. Nastepnie pokazać że g_n można przybliżać funkcjami gładkimi postaci $w_m g_n$ gdzie $w_m = \phi * \chi_m$, zaś χ_m jest ciągiem funkcji wspólnie ograniczonych o nośnikach zwartych zbieżnym jednostajnie na zbiorach zwartych do 1.