1. Zakładamy że $e^{sd(x,e)}f(x) \leq e^{s^m}$ dla każdego $s > 0$ i ustalonego $m > 1$. Pokazać że wtedy

$$f(x) \leq e^{-(m-1)(d(x,e)/m)^{m/(m-1)}}$$

2. Niech f będzie funkcją gładką o nośniku zwartym ma prostej. Pokazać że dla $0 \leq k \leq n$

$$\|f^{(k)}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|_{L^2}^{k/m}$$

gdzie $f^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną.

3. Niech $f \in L^2([0,1])$. Zakładamy że druga pochodna dystrybucyjna f leży w L^2. Pokazać że wtedy pierwsza pochodna f też jest w L^2 i

$$\|f^{'}\|_{L^2(I)} \leq C_I(\|f\|_{L^2([0,1])} + (\|f\|_{L^2([0,1])}\|f^{''}\|_{L^2([0,1])})^{1/2})$$

gdzie I jest przedziałem domkniętym zawartym w $(0,1)$, zaś C_I zależy tylko od I.

4. Niech d będzie metryką sterowania optymalnego dla pól X_i, $i = 1, \ldots, n$. Pokazać że dla ustalonych $0 < k < n$ istnieją c i C takie że

$$\|e^{cd(x,e)}X_i^k f\|_{L^2(G)} \leq C(\|e^{d(x,e)}f\|_{L^2(G)} + \|e^{d(x,e)}f\|_{L^2(G)}^{(n-k)/n}\|X_i^n f\|_{L^2(G)}^{k/n})$$

dla dowolnego f takiego że prawa strona ma sens.