1. Zakładamy że Y_1 i Y_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi of wartościach w grupie Liego G i rozkładach μ_i ($i = 1, 2$). Pokazać że $Y_1 Y_2$ ma rozkład $\mu_1 * \mu_2$. Ponadto rozkładem Y_1^{-1} jest odbicie $\hat{\mu}_1$ (przypominam że $\hat{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$. Dodatkowo, $\langle \hat{\mu} * f, g \rangle = \langle f, \mu * g \rangle$ (tzn. odbicie miary odpowiada przejściu do operatora sprzężonego dla splotu).

2. Niech V będzie przestrzenią Banacha. Mówimy że wektor $w \in V^*$, $\|w\| = 1$, wylicza normę $v \in V$ jeśli $\|v\| = \langle v, w \rangle$. Powiemy że operator A jest dyssypatywny jeśli dla każdego v z dziedziny A i dowolnego $w \in V^*$ wyliczającego normę v mamy $\Re(\langle Av, w \rangle) \leq 0$. Pokazać że gdy V jest przestrzenią Hilberta to wektor wyliczający normę to dodatnia wielokrotność v a warunek dyssypatywności to ujemna określoność częsci hermitowskiej A. Jeśli V to przestrzeń funkcji ciągłych dążących do 0 w nieskończoności to funkcjonał wyliczajcy normę f to odpowiednia wielokrotność miary jednostkowej skupionej w maksimum modułu f. Jeśli moduł f osiąga maksimum w więcej niż jednym punkcie to jest wiele funkcjonałów wyliczających normę.

3. Zakładamy że rodzina operatorów $T(t) \in B(V)$, $t > 0$ jest półgrupą kontrakcji, tzn, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ i $\|T(t)\| \leq 1$. Niech A będzie generatrem $T(t)$, tzn.

$$Av = \lim_{t \to +0} t^{-1}(T(t) - I)v$$

przy tym dziedzina A to zbiór tych wektorów dla których granica istnieje. Pokazać że A jest dyssypatywny.

4. Niech $Y_{i,j}$ będą zmiennymi losowymi, takimi że przy ustalonym j zmiene $Y_{i,j}$ są niezależne i mają jednakowy rozkład $p_{2^{-j}}$ (gdzie p_t jest jądrem ciepła dla operatora $L = -\sum X_j^2$). Niech $Z_{i,j}$ będą zmiennymi losowymi spełniającymi $Z_{0,j} = e$, $Z_{i+1,j} = Y_{i,j} Z_{i,j}$. Niech

$$q(k, j, \lambda) = P(\max_{i < 2^k} \{d(Z_{i+1,j}, e)\} > \lambda)$$

Zauważyć że

$$q(k + 1, j, \lambda) \leq q(k, j, \lambda) + P(d(Z_{2^k,j}, e) > \alpha) + q(k, j, \lambda - \alpha)$$

Bazując na tym pokazać że

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_j q(j, j, \lambda) = 0$$

5. Niech L_n będzie ciągiem operatorów dodatnio określonych (samosprzężonych) na przestrzeni Hilberta H, niech L będzie operatorem dodatnio określonym (samosprzężonym) na H i niech V będzie podprzestrzenią gęstą H taką że V jest zawartą w dziedzinie L i w dziedzinie L_n dla dowolnego n. Zakładamy że L jest istotnie samosprzężony na V, tzn. domknięcie L obciętego do V to z powrotem L. Pokazać że jeśli $L_n v \to Lv$ na V to $(I + L_n)^{-1} v \to (I + L)^{-1} v$ na H. Ponadto $\exp(-tL_n)v \to \exp(-tL_n)v$ na H.

Wskazówka: Niech $R = (I+L)^{-1}$ i $R_n = (I+L_n)^{-1}v$. Wiedząc że $R_n v \to Rv$ dla $v \in H$ pokazać że $P(R_n)v \to P(R)v$ dla $v \in H$ i dowolnego wielomianu P. Stąd wywnioskować że $F(R_n)v \to F(R)v$ dla $v \in H$ i dowolnej funkcji ciągłej F.

6. Lokalne centralne twierdzenie graniczne. Niech μ_n będzie ciągiem symetrycznych (tzn. takich że $\mu_n(A^{-1}) = \mu_n(A)$ dla dowolnego borelowskiego A)

miar probabilistycznych na G takim że $n(\mu_n * f - f)(e) \to -Lf(e)$ dla dowolnej $f \in C_c^\infty(G)$ (gdzie $L = -\sum X_i^2$ jest podlaplasianem). Pokazać że wtedy dla dowolnego otoczenia jedynki U o domknięciu zwartym mamy $n\mu_n(G - U) \to 0$. Ponadto $n \int_U d(x,e)^2 d\mu_n(x)$ jest ograniczone i $n(\mu_n * f - f) \to -Lf$ w $L^2(G)$. Rozważając $L_n f = -n(\mu_n * f - f)$ pokazać że $\exp(-tL_n)f \to p_t * f$ dla $f \in L^2(G)$ (gdzie p_t jest jądrem ciepła dla L). Zapisując $\exp(-tL_n)$ jako szereg i porównując wyrazy pokazać że $\mu_n^{(n)} f \to p_1 * f$.

Uwaga: Symetria μ_n jest potrzebna by użyć zadanie 5. Ale wynik zadania 5 można uzyskać trochę inną metodą bez założenia samosprzężoności co pozwala usunąć założenie symetrii z zadania 6.