Niech B będzie przestrzenią Banacha. Powiemy że rodzina operatorów $T(t)$, $t \geq 0$ jest mocno ciągłą półgrupą operatorów na B jeśli $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ dla $t_1, t_2 \geq 0$, $T(0) = I$ i $\lim_{t\to+0} T(t)v = v$ dla dowonego $v \in B$ gdzie zbieżność jest normowa w B. Powiemy że $T(t)$, $t \geq 0$ jest słabo ciągłą półgrupą operatorów jeśli spełnia takie same warunki, ale w granicy mamy zbieżność słabą. Powiemy że $T(t)$ jest półgrupą kontrakcji jeśli $\|T(t)\| \leq 1$ dla dowolnego $t \geq 0$.

Generator A półgrupy $T(t)$ definujemy jako

$$Av = \lim_{t\to+0} t^{-1}(T(t) - I)v$$

przy tym dziedzina A to zbiór tych wektorów dla których granica istnieje.

1. Pokazać że jeśli $T(t)$ słabo ciągłą półgrupą operatorów na B to istnieje stała C taka że $\|T(t)\| \leq C \exp(Ct)$.

2. Pokazać że jeśli $T(t)$ mocno ciągłą półgrupą operatorów na B to

$$\int_0^s T(t)vdt$$

leży w dziedzinie generatora A. Ponadto

$$\lim_{s\to+0} s^{-1} \int_0^s T(t)vdt = v$$

dla dowonego $v \in B$, czyli A ma gęstą dziedzinę.

3. Pokazać że jeśli $T(t)$ mocno ciągłą półgrupą operatorów na B zaś v leży w dziedzinie generatora to $t \mapsto T(t)v$ jest różniczkowalna. Jeśli dodatkowo $T(t)$ jest półgrupą kontrakcji to

$$\|T(t)v - T(s)v\| \leq |t - s|\|Av\|$$

4 Pokazać że jeśli $T(t)$ mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na B to

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty T(t)\exp(-\lambda t)dt$$

dla $\lambda > 0$. W szczególności $\lambda I - A$ jest odwracalny.

5 Niech $B = L^2([0, 1])$. $T(t)f(x) = f(t + x)$ dla $t + x \leq 1$, i jest zerem poza tym. $S(t)f(x) = f(t + x)$ gdzie dodawanie jest modulo 1. Wyznaczyć generatory $T(t)$ i $S(t)$.

6 Zakładamy że $S(t)$ i $T(t)$ są komutującymi (tzn. $T(t_1)S(t_2) = S(t_2)T(t_1)$) półgrupami kontrakcji z generatorami A i B odpowiednio. Niech v będzie wektorem z przekroju dziedzin A i B. Pokazać że

$$\|T(t)v - S(t)v\| \leq t\|Av - Bv\|$$

Wskazówka: Użyć wzór $T(t)v - S(t)v = \int_0^t T(t - s)(A - B)S(s)ds$

7. Zakładamy że operator A jest dyssypatywny i dla pewnego $\lambda > 0$ operator $\lambda I - A$ jest odwracaly. Pokazać że wtedy dla dowolnego $\lambda > 0$ operator $\lambda I - A$ jest odwracaly zaś $(I - \lambda A)^{-1}$ jest kontrakcją. Ponadto operator $A_\lambda = \lambda^{-1}((I - \lambda A)^{-1} - I) = A(I - \lambda A)^{-1}$ jest dyssypatywny, ograniczony i $\lim_{\lambda\to+0} A_\lambda v = Av$ dla v z dziedziny A. Wywnioskować stąd że A jest generatorem półgrupy kontrakcji $T(t)$, przy tym $T(t) = \lim T_\lambda(t)$ gdzie $T_\lambda = \exp(A_\lambda)$.