1. Niech ϕ będzie nieujemną funkcją taką że $\int_{d(x,e)<1} d(x,e)\phi(x)dx < \infty$ i $\int_{d(x,e)\geq 1} \phi(x)dx < \infty$ dla pewnej metryki Riemmana d. Pokazać że wtedy operator A zadany wzorem:

$$Af(x) = \int (f(y^{-1}x) - f(x))\phi(y)dy$$

jest generatorem półgrupy kontrakcji na $C_0(G)$ (przestrzeń funkcji ciągłych, dążących do 0 w nieskończoności), dokładniej, półgrupy operatorów splotu z miarami probabilistycznymi. Jeśli $\int \phi(x)dx = \infty$ to te miary mają gęstości.

Wskazówka: Przybliżać A operatorami podobnej postaci, ale takimi że całkowanie jest po dopełnieniu otoczenia e.

2. Niech $\phi_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dla $\alpha \in (0,1)$ będzie zadane wzorem: $\phi_\alpha = x^{-\alpha-1}$ dla $x > 0$ i 0 poza tym. Sprawdzić że ϕ_α spełnia warynki z zadania 1. Niech $h_\alpha(t,x)$ będzie gęstością miary odpowiadającą $\exp(tA)$ gdzie A jest operatorem z zadania 1 odpowiadającym ϕ_α. Pokazać że $h_\alpha(t,x) = 0$ dla $x \leq 0$.

Niech L będzie podlaplasianem na G. Niech $T(t) = \int h_\alpha(t,s)\exp(-sL)ds$. Pokazać że $T(t)$ jest półgrupą operatorów splotu z miarami probabilistycznymi i że generator B półgrupy $T(t)$ jest zadany wzorem

$$Bv = \int_0^\infty s^{-\alpha-1}(\exp(-sL) - I)vds.$$

Ponadto $B = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}L^\alpha$.